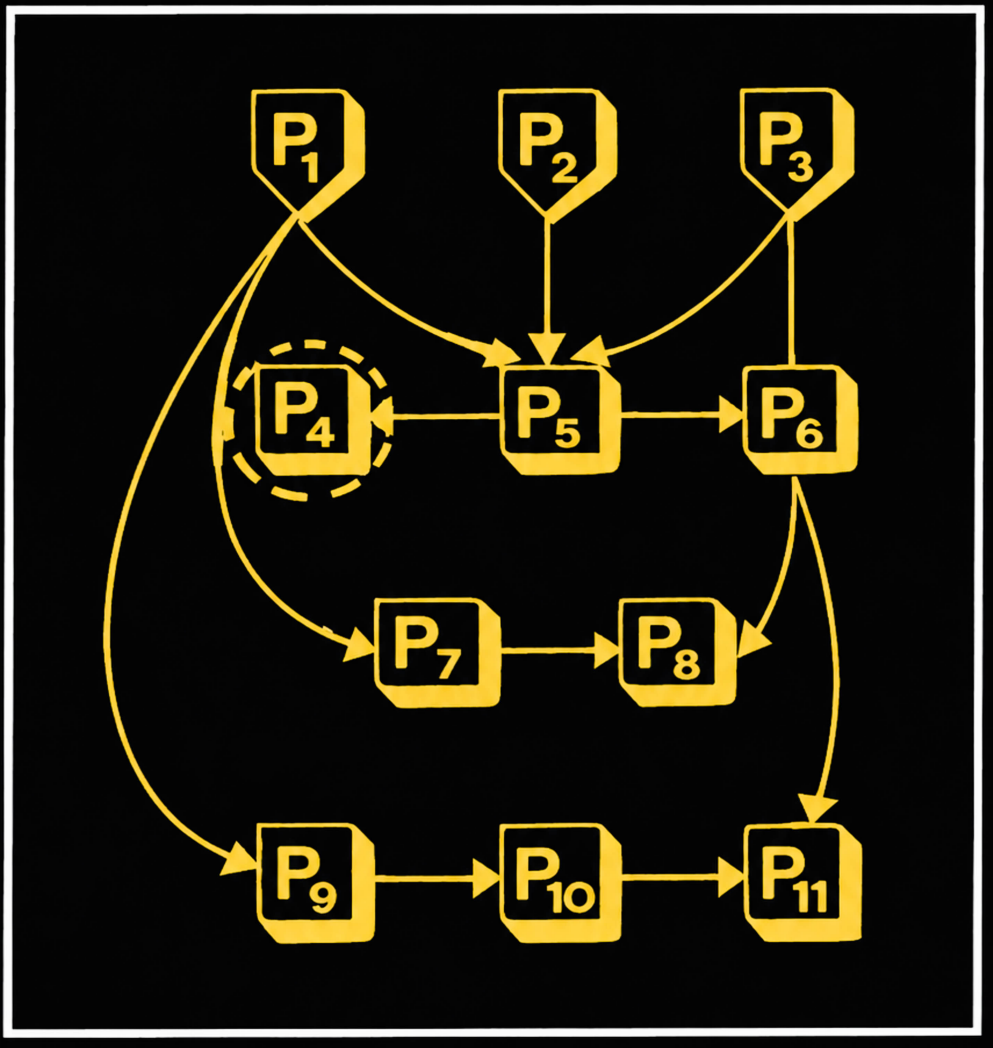
А. А. СТОЛЯР

ПЕДАГОГИКА МАТЕМАТИКИ



А. А. СТОЛЯР

ПЕДАГОГИКА МАТЕМАТИКИ

Издание третье,
переработанное и дополненное

*Допущено Министерством просвещения СССР
в качестве учебного пособия
для студентов физико-математических
факультетов педагогических институтов*

МИНСК
«ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»
1986

ББК 74.262.я73
С 81
УДК 51(075.8)

Рецензенты: *кафедра методики преподавания математики* Свердловского педагогического института; *Р. С. Черкасов*, кандидат педагогических наук, профессор кафедры методики преподавания математики Московского педагогического института им. В. И. Ленина

С $\frac{1702010000-015}{M\ 304(05)-86}$ 16—86

© Издательство
«Вышэйшая школа», 1986

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие к третьему изданию 3

ОБОЗНАЧЕНИЯ 7

ВВЕДЕНИЕ. ПРЕДМЕТ И МЕТОДЫ ПЕДАГОГИКИ МАТЕМАТИКИ 8

1. Предмет педагогики математики (8). 2. Два класса проблем и связь между ними (10). 3. Связь с другими науками (11). 4. Методы педагогики математики (15)

Часть 1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

1. Математика как наука и как учебный предмет 18

1. Математика как наука (18). 2. Цели обучения математике (23). 3. Математика как учебный предмет (25)

2. Модернизация математического образования (положительные и отрицательные аспекты) 29

1. Движение за модернизацию математического образования (29). 2. Деятельность по модернизации математического образования в нашей стране (36). 3. Дискуссионные вопросы и связанные с ними проблемы (40)

3. Психолого-дидактические основы. Общие вопросы 48

1. Три уровня теории обучения (48). 2. Психологические основы (49). 3. Модель математической (учебной) деятельности (53). 4. Общедидактические основы (60)

4. Психолого-дидактические основы. Дидактические принципы . . 63

1. Система дидактических принципов (63). 2. Научность в обучении (64). 3. Сознательность усвоения (65). 4. Активность учащихся (69). 5. Наглядность обучения (70). 6. Прочность знаний (77). 7. Индивидуальный подход (79)

5. Математическая организация эмпирического материала . . . 80

1. Постановка проблемы (80).. 2. Наблюдение и опыт (81). 3. Индукция (86). 4. Аналогия (89). 5. Обобщение и абстрагирование (92)

6. Логическая организация математического материала. Математические понятия 94

1. Объем и содержание понятия (94). 2. Определение (95). 3. Классификация (101). 4. Система понятий (105)

7. Логическая организация математического материала. Математические предложения и доказательства 107

1. Индукция и дедукция (107). 2. Доказательства математических предложений (110). 3. Обучение доказательству (112) 4. Локальная логическая организация (120)

8. Логическая организация математического материала. Аксиоматический метод 126

1. Постановка проблемы (126). 2. Аксиоматический метод как способ построения школьного курса (128). 3. Аксиоматический метод как предмет изучения (130)

9. Применение математической теории. Общие вопросы 141

1. Виды применения теории (141). 2. Связь математики с физикой в школьном обучении (143). 3. Задачи (146). 4. Прикладные и математические задачи (150). 5. Обучение решению задач (157)

10. Применение математической теории. Общие методы решения задач 159

1. Интуитивное понятие алгоритма (159). 2. Операторно-логическая структура (164). 3. Схемы алгоритмов (166). 4. Обучение общим методам решения задач (167)

11. Применение математической теории. Методы поиска решения задач 175

1. Два подхода к решению задач (175). 2. Представление задач и методы поиска в пространстве состояний (176). 3. Сведение задач к подзадачам (183). 4. Алгоритм поиска доказательства (187)

12. Обучение математике и логическое развитие учащихся . . 196

1. Традиционное обучение и логическое развитие учащихся (196). 2. Роль и место элементов логики в обучении математике (202). 3. Методика разъяснения смысла и свойств логических операций (204). 4. Методика анализа рассуждений (210)

13. Математический язык и обучение математике 214

1. Язык математики (214). 2. Математический язык и обучение математике (216). 3. Переменная (217). 4. Термы и формулы (220). 5. Современный математический язык в школьном обучении (226). 6. Проблема трех языков (229)

14. Воспитательные функции обучения математике 230

1. Воспитывающий характер обучения математике (230) 2. Воспитание мировоззрения (232). 3. Воспитание культуры мышления (235). 4. Воспитание определенных черт характера (237)

Часть 2. ОСНОВЫ ПРАКТИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

15. Число. Общая методика 239

1. Содержание (239). 2. Традиционная методика (239). 3. Различные схемы развития понятия числа (240). 4. Раскрытие идеи развития понятия числа в школьном обучении (241). 5. Общая методика введения новых чисел (243)

16. Число. Конкретная методика 249

1. Числовые множества (249). 2. Натуральные числа (250). 3. Целые числа (254). 4. Рациональные числа (255). 5. Вещественные числа (256)

17. Функция. Общие вопросы 259

1. Содержание (259). 2. Различные трактовки общего понятия функции (260). 3. Различные подходы к формированию и развитию понятия функции в школьном обучении (262). 4. Процесс формирования понятия функции (264)

18. Функция. Методика изучения 268

1. Исследование функций элементарными средствами (268). 2. Изучение функции $y=ax+b$, $x \in R$ (269). 3. Изучение функции $y=ax^2$, $x \in R$ (274). 4. Методика построения графиков (277)

19. Операция 280

1. Содержание (280). 2. Различные трактовки (281). 3. Формирование общего понятия операции (283). 4. Алгебраические структуры (284)

20. Уравнение и неравенство 286

1. Содержание (286). 2. Различные трактовки (287). 3. Формирование общих понятий уравнения и неравенства на базе идеи логической функции (290)

21. Предел и непрерывность. Интуитивные и точные понятия . . 296

1. Общие замечания (296). 2. Предел последовательности (297). 3. Предел функции (305). 4. Непрерывность функции (309)

22. Производная 312

1. Содержание (312). 2. Понятие производной (313). 3. Применение производной (318)

23. Интеграл 321

1. Содержание (321). 2. Введение понятия интеграла (322). 3. Применение интеграла (326)

24. Координаты и векторы 330

1. Математические методы в школьной геометрии (различные подходы) (330). 2. Координатный метод (333). 3. Понятие вектора (335). 4. Сочетание координатного и векторного методов (339)

25. Геометрические преобразования 346

1. Различные подходы (346). 2. Геометрические преобразования в планиметрии (348). 3. Геометрические преобразования в стереометрии (351)

26. Геометрические построения 353

1. Геометрические построения в программе (353). 2. Геометрические построения в систематическом курсе планиметрии (353). 3. Геометрические построения в стереометрии (358)

27. Геометрические величины 361

1. Содержание (361). 2. Величина и ее измерение (362). 3. Геометрические величины (365)

28. Исследовательские методы (практические материалы) . . . 369

1. Построение маленьких теорий (369). 2. Исследование в процессе решения задач (380)

29. Элементы информатики в школьном обучении 383

1. Цели, предпосылки, проблемы (383). 2. Пропедевтика информатики в школьном обучении математике (387). 3. Двоичная система счисления (391). 4. Булевы функции (394). 5. Двоичный сумматор (398). 6. Подготовка к программированию (402). 7. Межпредметные связи «математика — информатика» (405). 8. ЭВМ как средство обучения (407).

Рекомендуемая литература 409

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

1. Важнейшим событием в области народного образования за время, прошедшее после выхода второго издания «Педагогики математики» (1974), является реформа школы.

Задачи, поставленные партией перед народным образованием, получили конкретное выражение в «Основных направлениях реформы общеобразовательной и профессиональной школы» и в постановлениях ЦК КПСС и СМ СССР по реализации реформы — документах большой социально-политической значимости, определяющих программу дальнейшего развития школы, перевод ее работы на новый качественный уровень, соответствующий условиям и потребностям общества развитого социализма.

Главная роль в осуществлении реформы принадлежит учителю. В «Основных направлениях реформы общеобразовательной и профессиональной школы» подчеркивается, что неотъемлемая часть реформы системы народного образования — значительное улучшение подготовки учительских кадров. В постановлении ЦК КПСС и СМ СССР «О мерах по совершенствованию подготовки, повышению квалификации педагогических кадров системы просвещения и профессионально-технического образования и улучшению условий их труда и быта» выдвигается требование значительно улучшить психолого-педагогическую и методическую подготовку учителей (преподавателей) и мастеров производственного обучения. Это требование, разумеется, относится и к методической подготовке учителя математики.

Хотя методическую подготовку обычно считают компонентом психолого-педагогической подготовки учителя, ее выделение в Постановлении ЦК КПСС и СМ СССР оправдано, по крайней мере, двумя существенными обстоятельствами.

Во-первых, методическая подготовка учителя, в частности учителя математики, являясь заключительным компонентом его психолого-педагогической подготовки, выпол-

няет и важную синтезирующую функцию. Суть ее в том, что все знания, полученные студентами в области методологии, математики, психологии и педагогики (а также логики, изучение которой предусмотрено «Основными направлениями реформы общеобразовательной и профессиональной школы»), объединяются, конкретизируются и используются в практике школьного обучения математике. Во-вторых, методическая подготовка учителя математики находится на еще более низком уровне, чем его общая психолого-педагогическая подготовка.

2. Центральное место в методической подготовке учителя математики в педагогическом вузе занимает учебная дисциплина «методика преподавания математики» (эту область знаний называют также «дидактикой математики» или «педагогикой математики»).

Анализ читаемого в педагогических вузах курса методики преподавания математики, сложившегося и ставшего по своему содержанию и стилю изложения традиционным, позволяет выявить три его существенных недостатка.

Первый недостаток — отсутствие методической теории (теории обучения на конкретно-методическом уровне), превращающее методику в совокупность рекомендаций, как преподавать отдельные темы школьного курса математики. По такой рецептурной методике невозможно готовить творчески мыслящего учителя, способного решать задачи, вытекающие из требований реформы школы.

Второй недостаток — изолированность методики от ее психологических и дидактических основ. Методические рекомендации разрознены, не объединены и не обоснованы никакими психологическими и общедидактическими концепциями.

Третий недостаток — совершенно неудовлетворительное изучение методов обучения, как общих, разработанных в дидактике и конкретизированных с учетом специфики математики, так и специальных, отражающих методы познания, используемые в самой математике.

Предлагаемое третье издание «Педагогики математики» в значительно большей мере, чем первые два издания, ориентировано на устранение отмеченных недостатков традиционного курса методики преподавания математики, на значительное повышение уровня методической подготовки учителя математики, отвечающее требованиям реформы школы.

3. За время, прошедшее после выхода в свет второго издания «Педагогики математики», произошли важные со-

бытия, касающиеся и непосредственно школьного математического образования.

Программы, введенные в 1970 г., и соответствующие им учебники подверглись справедливой критике. Возникла дискуссия по важнейшим вопросам преподавания математики в школе (подход к построению школьной математики, система понятий, уровень строгости и язык изложения, соотношение теории и практики в школьном обучении математике). В этой дискуссии приняли участие выдающиеся советские математики (академики А. Д. Александров, В. С. Владимиров, Л. В. Канторович, А. Н. Колмогоров, Л. С. Понтрягин, С. Л. Соболев, А. Н. Тихонов и др.), высказавшие ряд критических замечаний по содержанию школьной математики и предложения по дальнейшему совершенствованию среднего математического образования.

Необходимо отметить, что объектами дискуссии были в основном содержание школьной математики и подход к его изложению в школьных учебниках. Она не касалась методов обучения математике, влияние которых на результаты обучения весьма существенно.

Педагогика математики не может уйти от обсуждения как положительных аспектов, так и некоторых недостатков осуществленной в 70-е годы модернизации математического образования. Более того, она должна указать возможные пути преодоления возникающих трудностей и дальнейшего совершенствования, повышения качества обучения математике в соответствии с требованиями реформы школы.

В предлагаемом третьем издании пособия уделяется основное внимание эффективным методам обучения, ориентированным на достижение учебных, воспитательных и развивающих целей обучения математике. Это пособие направлено на обеспечение будущих учителей достаточно общей и гибкой методической подготовкой, предполагающей знание теоретических основ обучения и умение их применять к различным конкретным темам школьного курса математики, при использовании различных школьных учебников. Поэтому оно не привязано к определенному школьному учебнику.

4. Третье издание «Педагогики математики» значительно отличается от второго. Существенной переработке подверглось большинство глав, а некоторые из них заменены полностью новыми, посвященными теории и практике применения методов обучения математике, отвечающих требованиям реформы школы.

Изменена и структура пособия. В третьем издании имеются введение и две части: «Основы теории обучения математике» и «Основы практики обучения математике». Значительно больше внимания в третьем издании, чем во втором, уделяется психолого-дидактическим основам, различным применениям теоретических знаний. Новые главы посвящены общим методам решения задач (алгоритмам), методам поиска решения задач, воспитательным функциям обучения математике, практическим материалам по применению исследовательских методов обучения математике, элементам информатики.

По вопросам содержания школьного курса математики пособие ориентируется на программу 1981 г. (базисную), одобренную Президиумом АПН СССР, Бюро отделения математики АН СССР и утвержденную Министерством просвещения СССР. Возможные изменения программы могут касаться деталей, но не основных ее содержательных линий, поэтому не повлияют на содержание педагогики математики.

В соответствии с положениями реформы школы повышается значимость факультативных занятий, призванных предоставить учащимся старших классов возможность углубленного изучения по их выбору отдельных предметов физико-математического, химико-биологического и общественно-гуманитарного циклов. В настоящем издании рассматриваются и некоторые методические вопросы углубленного изучения отдельных тем школьного курса.

5. Учебным планом по методике преподавания математики предусмотрены лекции, практические и лабораторные занятия, курсовая и дипломная работы.

Предлагаемое пособие содержит конспективное изложение лекционного курса. Материал каждой главы соответствует примерно содержанию одной лекции. Содержание и стиль изложения способствуют развитию и научно-исследовательской работы студентов.

Автор выражает благодарность рецензентам книги — кафедре методики преподавания математики Свердловского педагогического института и Р. С. Черкасову, профессору кафедры методики преподавания математики Московского педагогического института им. В. И. Ленина.

Все отзывы на книгу просим присылать по адресу: 220048, Минск, проспект Машерова, 11, издательство «Вышэйшая школа».

Автор

ОБОЗНАЧЕНИЯ

Приведем список используемых символов (не включая традиционные):

$\in$ — является элементом, принадлежит;
$\subseteq$ — является частью, подмножеством, включается в;
$\varnothing$ — пустое множество;

$\{a, b, c\}$ — множество, состоящее из элементов a, b, c;
$\{x \mid P(x)\}$ — множество всех x, обладающих свойством P;

$\cup$ — объединение;
$\cap$ — пересечение;

(a, b) — пара (упорядоченная);
$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — упорядоченный набор из n элементов;

$A \times B$ — произведение двух множеств A и B ($\{(x, y) \mid x \in A$ и $y \in B\}$);
A^2 — произведение множества A на самое себя: $(\{x, y) \mid x \in A$ и $y \in A\}$);
A^n — произведение n множеств, равных A:

$$(\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in A \text{ и } x_2 \in A \text{ и } \ldots \text{ и } x_n \in A\});$$

N — множество всех натуральных чисел $\{1, 2, 3, \ldots\}$;
N_0 — множество всех целых неотрицательных чисел $\{0, 1, 2, \ldots\}$;
Z — множество всех целых чисел;
Q — множество всех рациональных чисел;
R — множество всех вещественных (действительных) чисел;
C — множество всех комплексных чисел;
R^2 — множество всех пар вещественных чисел (действительная плоскость);
R^3 — множество всех троек вещественных чисел (трехмерное действительное числовое пространство);
$f: X \to Y$ — отображение f множества X в множество Y, или функция, определенная на множестве X и принимающая значения из Y;
$f^{-1}: Y \to X$ — функция, обратная f;
$[a, b]$ — замкнутый отрезок, т. е. $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$;
$]a, b[$ — открытый отрезок, т. е. $\{x \mid a < x < b\}$;
$\Rightarrow$ — следует;
$\Leftrightarrow$ — равносильно;
$\forall x$ — для всякого x (квантор общности);
$\forall x \in N$ — для всякого x из N;
$\exists x$ — существует x такое, что ... (квантор существования);
$\exists x \in N$ — существует x из N такое, что ...

ВВЕДЕНИЕ

ПРЕДМЕТ И МЕТОДЫ ПЕДАГОГИКИ МАТЕМАТИКИ

1. Предмет педагогики математики

1.1. Предметом педагогики математики является *обучение математике.*

В широком смысле педагогика математики представляет собой научную область, занимающуюся исследованием процесса обучения математике на всех уровнях, начиная с первого класса средней школы (и даже с обучения дошкольников) и включая высшую школу, различные типы средних специальных учебных заведений, а также самостоятельное изучение математики.

Мы ограничим в нашем понимании педагогику математики областью, предметом которой является *обучение математике в средней общеобразовательной школе*, и в этом смысле будем применять в дальнейшем термин «педагогика математики».

1.2. Прежде всего условимся определенным образом понимать процесс обучения.

Обучение, в частности обучение математике,— сложный процесс управления, осуществляемый учителем с использованием ряда вспомогательных средств (учебников, наглядных пособий, технических средств обучения).

Пользуясь анализом процессов управления, производимым кибернетикой, будем исходить из того, что обучение, как любой процесс управления, включает: восприятие, переработку, хранение и передачу информации.

Учитель перерабатывает информацию, получаемую им из программы, научной, учебной и методической литературы, а также информацию об уровне и возможностях мыслительной деятельности ученика и передает, пользуясь определенными средствами, *обучающую* информацию ученику.

Ученик воспринимает и перерабатывает информацию, полученную им от учителя, из учебника и других источников, и по требованию педагога передает ему информацию о качестве усвоения учебного материала и достигнутом раз-

витии мыслительной деятельности в виде ответов на вопросы, выполнения упражнений, решения задач.

Таким образом, в процессе обучения происходит передача информации в двух направлениях: от учителя к ученику и от ученика к учителю. Так называемая «обратная связь» — «ученик — учитель» — является существенной составной частью процесса обучения. Без учета на каждом этапе обучения уровня мыслительной деятельности ученика, развития у него определенных структур мышления, формирования определенных понятий и качества усвоения им предыдущего материала не может быть построено эффективное обучение. Это касается обучения вообще и особенно обучения математике ввиду некоторых специфических особенностей последней.

1.3. Термин «математика» может обозначать определенную мыслительную деятельность *(математическую деятельность)* или же теорию, являющуюся результатом этой деятельности.

В выражении «обучение математике» можно, разумеется, понимать слово «математика» или в одном, или в другом смысле и соответственно с этим получать различные педагогики математики. В одном случае это область, занимающаяся обучением какой-то математической теории, точнее началам каких-то математических теорий, в другом — это область, предметом которой является обучение определенным аспектам мыслительной деятельности, объединенным под названием «математическая деятельность».

Мы будем исходить из того, что *обучение математике есть в определенной мере и обучение математической деятельности.* Это исходное положение можно рассматривать как собственно педагогико-математический принцип, характеризующий определенную концепцию обучения математике, положенную в основу описанной в настоящем пособии системы педагогики математики.

Разумеется, не все исходные положения, на основе которых мы строим педагогику математики, являются специфическими для этой области. В качестве исходных будут приняты и предложения, относящиеся к общей теории познания, дидактике, педагогической психологии. Например, известные принципы дидактики (научность, систематичность и последовательность обучения, сознательность и активность учащихся, наглядность и доступность обучения, прочность знаний, принцип индивидуального подхода) также будут приняты нами за исходные. Мы должны будем

лишь конкретизировать эти принципы и разработать их реализацию в обучении математике.

1.4. Для выяснения предмета педагогики математики мы выделим следующие элементы процесса обучения: а) цели обучения (для чего мы учим?); б) объект обучения (кого мы учим?); в) содержание обучения (чему мы учим?); г) методы обучения (как мы учим?).

Исходя из общих целей обучения и воспитания в советской школе, разработанных педагогикой, из специфических особенностей математики, ее роли и места в современной науке, технике и производстве, педагогика математики определяет прежде всего цели и задачи среднего математического образования, цели и задачи на каждом этапе обучения математике с учетом психологической характеристики учащихся данного возраста и предшествующего обучения. Она также определяет *содержание* и разрабатывает *методы* обучения, соответствующие этому содержанию и уровню мыслительной деятельности учащихся.

Соответствие методов обучения содержанию надо понимать как отражение в обучении логики и методов той части математики, которая составляет предмет школьного обучения.

Соответствие методов обучения уровню мыслительной деятельности учащихся (учет психологического фактора) надо понимать не просто как обеспечение доступности изучаемого материала. Это соответствие включает и максимальное использование уже имеющихся возможностей мыслительной деятельности учащихся, и ускорение дальнейшего развития этой деятельности в процессе обучения.

Так как обучение математике рассматривается нами и как обучение математической деятельности, то к предмету педагогики математики следует отнести и анализ этой деятельности и разработку методов обучения всем ее аспектам.

2. Два класса проблем и связь между ними

Проблемы, входящие в предмет педагогики математики, могут быть условно отнесены к двум классам: а) проблемы содержания обучения, объединяемые вопросом «ЧЕМУ УЧИТЬ»; б) проблемы методов обучения, объединяемые вопросом «КАК УЧИТЬ».

Мы говорим, что проблемы педагогики математики лишь *условно* относятся к указанным двум классам, так как составные части процесса обучения тесно связаны меж-

ду собой и решение любой проблемы, относящейся к одной из этих частей, немыслимо без учета других.

При разработке методов обучения мы не можем, с одной стороны, представлять их абстрактно, безотносительно к какому-либо конкретному содержанию и конкретному объекту обучения. С другой стороны, сама разработка новых методов обучения вызывает необходимость в обновлении содержания обучения и приводит к изменению уровня мыслительной деятельности учащихся. Например, введение элементов дифференциального и интегрального исчислений в школьное обучение требует разработки специальной методики. Совершенно очевидно, что простой перенос вузовской методики изложения математического анализа в среднюю школу (разумеется, сложные доказательства опускаются) не может увенчаться успехом. Здесь необходим другой педагогический подход. Более того, введение начал анализа требует изменения методики изучения традиционного материала, в частности исследования функций элементарными средствами. Имеется в виду предварительное введение и использование некоторых понятий (приращения аргумента и функции, определение возрастающей и убывающей функции с использованием понятия приращения, изображение функций площадями и т. п.), подготавливающих учащихся к усвоению производной и интеграла.

Приведем другой пример. Если мы стремимся облегчить усвоение и применение геометрической теории использованием векторного метода, нам необходим аппарат векторной алгебры, т. е. это требует введения нового содержания.

3. Связь с другими науками

3.1. Педагогика математики представляет собой «пограничную» область, расположенную на «рубежах» математики, педагогики, логики и психологии. Она объединяет эти науки и опирается на них при решении своих проблем.

Общей методологической основой педагогики математики, как и тех наук, на которые она опирается, является диалектический материализм.

Одно из исходных положений, на базе которых мы строим педагогику математики, заимствовано из марксистско-ленинской теории познания. Оно отражает результат глубокого анализа процесса обучения как познавательного процесса, направленного на поиски и открытие истины, и выражается известной ленинской формулой, определяющей диалектическое единство трех его сторон: «От живого со-

зерцания к абстрактному мышлению *и от него к практике* — таков диалектический путь познания *истины*, познания объективной реальности» (*Ленин В. И.* Полн. собр. соч., т. 29, с. 152—153).

Ленинская формула выражает один из результатов теории познания. В педагогике математики мы ее принимаем в качестве одного из исходных положений, на базе которых будут получены новые результаты уже в этой конкретной области.

3.2. Решая проблемы содержания и методов обучения, педагогика математики опирается на *математику*.

Отбор учебного материала требует проведения глубокого анализа идей, методов и содержания математики как науки, выяснения ее места и роли в системе наук, ее приложений.

Для того чтобы приспособить отобранный математический материал к школьному изучению, педагогика математики подвергает его «дидактической обработке» — анализу логической структуры подлежащего изучению материала, различных возможных вариантов его построения, их сравнению, подбору необходимых примеров, конкретных ситуаций, упражнений и задач.

Разумеется, при дидактической обработке математического материала педагогика математики опирается не только на математику, но и на педагогику, логику и психологию. Однако роли этих наук различны. Математика доставляет нам исходный объект, подлежащий дидактической обработке (математический материал), педагогика, логика и психология указывают нам, каким должен быть результат этой обработки (учебный материал) и как его достичь.

3.3. Имея своим предметом обучение, педагогика математики опирается, естественно, на педагогику, в частности на общую теорию обучения (дидактику).

Методы обучения математике строятся на основе общих методов обучения, разрабатываемых в педагогике, и специфических методов, отражающих в обучении особенности самой математики. Первые призваны обеспечить реализацию принципов дидактики в обучении математике, вторые — формирование и развитие математической деятельности у учащихся и также математических идей, лежащих в основе изучаемых теорий.

Опираясь на педагогику, мы, разумеется, учитываем и современные тенденции в усовершенствовании учебного процесса (алгоритмический подход в обучении, программированное обучение, проблемное обучение).

Общие и специфические методы не применяются обособленно. Они тесно переплетаются в процессе обучения. Мы их расчленяем лишь с целью изучения.

Педагогика математики опирается не только на дидактику, но и на теорию воспитания, так как обучение математике должно выполнять как образовательные, так и важные воспитательные функции. В частности, математике обычно приписывают особую роль в развитии логики мышления учащихся, так как при изучении математики приходится много тренироваться в выполнении различного рода логических выводов. Но приводит ли одна тренировка в рассуждениях без понимания того, как мы рассуждаем, к требуемому, хотя бы для корректной математической деятельности, развитию логики мышления учащихся? Проведенные эксперименты дали на этот вопрос совершенно ясный, недвусмысленный отрицательный ответ (Столяр А. А. Методы обучения математике. Мн., 1966).

Таким образом, сама по себе математика не решает задачу воспитания логики мышления учащихся. Эта задача должна решаться педагогикой математики.

3.4. Рассматривая вопрос о связи педагогики математики с *логикой*, мы должны прежде всего выяснить, какой логикой пользуется сама педагогика математики в своих выводах.

Каждая наука (теоретическая или экспериментальная) делает выводы, касающиеся изучаемых ею объектов (и в этом по существу ее значение), а следовательно, пользуется определенной логикой. Это, разумеется, относится и к педагогике математики. Хотя в ней широко пользуются взятыми из опыта данными, не все ее предложения устанавливаются экспериментальным путем (и это свойственно каждой экспериментальной науке). Многие предложения педагогики математики выводятся логически из других ранее установленных логическим или экспериментальным путем предложений. Но педагогика математики в отличие от математики, которая пользуется преимущественно дедуктивной логикой, основывает свои выводы преимущественно на правдоподобной логике. Поэтому получаемые в педагогике математики заключения в большинстве своем являются лишь вероятными гипотезами, которые подлежат подтверждению или опровержению экспериментальным путем.

Можно различать применение логики в педагогике математики, связанное с исследованием педагогических проблем, которые возникают в обучении математике, и приме-

нение, сводящееся к непосредственному изучению и использованию элементов логики в школьном обучении математике.

К применению первого типа относится, например, структурный анализ математического материала, подлежащего изучению в школе (анализ логической структуры) с целью его дидактической обработки, приспособления к школьному обучению, которое требует иногда упрощения логики этого материала (но не искажения этой логики или пренебрежения ею, как это часто встречается в традиционном преподавании).

Проблема непосредственного (явного) введения элементов логики в обучение математике состоит не в том, чтобы изучать специально и обособленно логику, а в том, чтобы необходимые элементы логики стали неотъемлемой частью самого преподавания математики, его важным рабочим инструментом, повышающим эффективность обучения и его влияние на развитие логического мышления у учащихся.

3.5. Одной из основ педагогики математики является *психология*. Проблемы педагогики математики не могут решаться без учета психологии обучаемого, его фактического уровня мышления.

Логика (формальная) исследует формы правильных рассуждений, она дает нам правила вывода, позволяющие по данным посылкам определить заключение, отвлекаясь при этом от механизма выводов, от того, как фактически протекают мыслительные процессы, как человеческий мозг воспринимает, хранит, перерабатывает и выдает информацию. В последнем аспекте мыслительная деятельность человека изучается психологией и физиологией высшей нервной деятельности.

Совершенно очевидно, что, рассматривая обучение математике и как обучение математической, т. е. определенной мыслительной, деятельности, педагогика математики не может опираться при этом на одну логику, исследующую лишь результаты мыслительной деятельности, а не саму эту деятельность (для логики мозг остается «черным ящиком», функционирование которого определяется лишь по «входам» и «выходам»).

Разумеется, педагогика математики не делает никаких новых открытий в психологии, она пользуется лишь результатами психологических исследований.

4. Методы педагогики математики

4.1. С помощью анализа педагогико-математических исследований можно выделить следующие методы, которыми пользуется педагогика математики: 1) изучение и использование истории развития математики и математического образования; 2) изучение и использование опыта современного преподавания математики (как отечественного, так и зарубежного); 3) перенос и дидактическая обработка идей, методов, языка науки математики; 4) эксперимент.

История математики предоставляет нам важную информацию об историческом пути развития математических понятий, методов, языка. Она часто подсказывает нам путь формирования и развития этих понятий, методов и языка в школьном обучении. Необходимо, однако, отметить, что исторический подход не является универсально применимым. Далеко не всегда целесообразно в школьном обучении следовать тому пути, по которому развивались математические понятия в тысячелетней истории науки. Известный современный голландский математик-педагог Г. Фройденталь даже утверждает, что история математики дает нам последовательность и исторические предпосылки математических понятий, но было бы огромной ошибкой преподавать математику, следуя исторической схеме.

История развития математического образования и методических идей показывает, как изменялись содержание и методы школьного обучения математике под влиянием самой математики и потребностей человеческого общества.

Исторический опыт иногда подтверждается и в современной ситуации. Например, из истории мы знаем, что элементы теории пределов стали проникать в школьное обучение примерно через сто лет после того, как теория и метод пределов были разработаны в науке. Из этого, разумеется, не следует, что все, возникающее в математической науке, примерно через сто лет проникает в школьное обучение. История показывает лишь, что те новые понятия, идеи, методы, которые должны обновлять и усовершенствовать школьное обучение, приближая его к современной науке, не сразу проникают в школьные программы. Для их внедрения требуется значительный период времени. Это легко объяснимо, и поэтому можно сделать вывод о правомерности некоторого (но не любого) отставания образования от развития науки.

Говоря об историческом подходе в педагогике математики, необходимо отметить, что заключения, сделанные в

результате изучения исторического опыта, истории развития математических идей и математического образования, сами по себе еще не являются достоверными. Они носят лишь правдоподобный характер. Из того, что сто или двести лет тому назад «что-то» изучалось «таким-то» методом, вовсе не следует, что и в настоящее время мы должны поступать таким же образом. Возможно, что развитие науки за это время предоставляет нам более рациональный метод трактовки этого материала или же указывает на то, что сам этот материал устарел и уже не должен быть предметом современного школьного обучения.

Изучение истории математики и математического образования приводит лишь к правдоподобным заключениям, к гипотезам, которые подлежат проверке с учетом многочисленных факторов, среди которых, естественно, на первый план выдвигается развитие науки и потребности современного общества.

4.2. Изучение, обобщение и использование положительного опыта современного преподавания математики — один из методов дальнейшего развития педагогики математики.

Труд учителя носит, безусловно, творческий характер. На основе понимания связи школьного преподавания математики с современной математикой, педагогикой, логикой и психологией преподаватель с хорошей математической и методической подготовкой творчески подходит к решению педагогических проблем, постоянно экспериментирует, ведет поиски по усовершенствованию методов обучения, разрабатывает оригинальные методические решения сложных тем школьной программы. На страницах журнала «Математика в школе» и в различных методических сборниках опубликованы весьма интересные результаты поисков творчески работающих учителей. Эти результаты способствуют дальнейшему развитию педагогики математики.

Для педагогики математики представляет несомненный интерес и зарубежный опыт обучения математике. Разумеется, это вовсе не означает, что мы намерены копировать зарубежный опыт. Мы исходим в разработке педагогики математики из собственных целей обучения, отражающих потребности нашего социалистического общества.

Однако необходимо изучать и анализировать зарубежный опыт для того, чтобы выявить те положительные его стороны, которые должны быть учтены при разработке содержания и методов обучения математике в нашей школе.

4.3. Педагогика математики пользуется методом «переноса» идей, методов, языка математической науки в школь-

ное обучение математике. Это, однако, не означает, что этот процесс происходит без всяких изменений. Идеи, методы, язык науки подвергаются специальной «дидактической обработке». Поэтому естественно говорить о методе «переноса и дидактической обработки». Когда возникает проблема включения новой темы в школьные программы, появляется и проблема дидактической обработки материала этой темы.

Вряд ли возможно дать единую схему дидактической обработки, пригодную для всех случаев. Мы перечислили (см. 3.2) наиболее существенные составные части метода дидактической обработки, которые в дальнейшем будут использоваться в конкретных случаях.

4.4. Педагогика математики широко пользуется методом эксперимента. Правильная постановка педагогического эксперимента вызывает большие трудности. Педагогический эксперимент сложнее, чем, скажем, экспериментальное исследование сопротивления материалов или различные физические эксперименты. Сложность педагогического эксперимента объясняется прежде всего недостаточной изученностью мыслительной деятельности человека, с которой непосредственно связан любой педагогический эксперимент, не говоря уже об отсутствии вспомогательных технических средств (в отличие от современных физических экспериментов, снабженных совершенной техникой).

Однако трудности, возникающие при постановке педагогического эксперимента, должны преодолеваться разработкой четкой методики эксперимента, исключением (насколько это возможно) субъективных факторов, обработкой данных с использованием статистических методов.

В последнее время уже встречаются корректно поставленные (в рамках реальных возможностей) педагогические эксперименты и ведется работа по усовершенствованию методики педагогических исследований.

Часть 1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

1. МАТЕМАТИКА КАК НАУКА И КАК УЧЕБНЫЙ ПРЕДМЕТ

1. Математика как наука

1.1. Вопрос о предмете математики как науки является первостепенным как в педагогике математики, так и в практической деятельности учителя математики.

Общеизвестно данное Ф. Энгельсом и ставшее классическим определение предмета математики: «Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, стало быть — весьма реальный материал» (*Маркс К., Энгельс Ф.* Соч. 2-е изд., т. 20, с. 37).

Чтобы изучить количественные отношения и пространственные формы в чистом виде, указывал Энгельс, математика абстрагируется от их вещественного содержания. Математике безразлично, из какого материала сделан шар, ей важно только то, что существуют (или осуществимы) тела, имеющие форму шара, которую она и изучает. В равной мере для математики безразлично, исследование какого процесса природы привело к необходимости рассматривать некоторую функцию; для математики эта функция важна сама по себе, она является самостоятельным математическим объектом.

Энгельс указывал, что исторически исходные понятия математики — натуральное число и геометрическая фигура — заимствованы исключительно из действительного мира, а не возникли в голове из чистого мышления.

Энгельс изложил свое определение предмета математики в замечательной работе «Анти-Дюринг», с момента опубликования которой прошло более ста лет. За это столетие математика пережила бурное развитие, коренную ломку основных понятий и методов. Это столетие — период становления современной математики. В то время, когда Энгельс работал над «Анти-Дюрингом» (1876—1877), неевклидова геометрия и геометрия многомерных пространств только получили признание среди математиков, теория групп только оформилась, теория множеств только возникла, а математическая логика зарождалась. Электронные

вычислительные машины, играющие важную роль в развитии современной математики, появились лишь в 40-х гг. XX в. Вполне понятно, что особенности нового этапа в развитии математики не могли быть учтены Энгельсом.

Естественно возникает вопрос, насколько определение Энгельса характеризует современную математику. Прежде всего выясним, что понимают под современной математикой, какие особенности ей присущи.

1.2. Всю историю развития математики условно разбивают на четыре основных периода. Начало каждого нового периода знаменовалось выдающимся научным достижением, определившим переход математики в новое качественное состояние.

Так, за периодом накопления первичных фактов, *периодом зарождения математики*, длившимся с древнейших времен до VI—V вв. до н. э., последовал *период элементарной математики* (или математики постоянных величин), началом которого послужило построение геометрии как самостоятельной науки в знаменитых евклидовых «Началах». Этот период длился до XVII в., когда создание исчисления бесконечно малых определило начало нового, третьего, периода — *периода классической высшей математики* (или *анализа*). Наконец, создание Н. И. Лобачевским и Я. Больяем в первой половине XIX в. неевклидовой геометрической системы явилось началом четвертого периода — *периода современной математики.*

Начало периода современной математики характеризовалось глубокими изменениями во всех ее основных разделах. Наиболее отчетливо, пожалуй, эти изменения можно проследить на примере геометрии. Для ее развития, началом которого послужили идеи Лобачевского и Больяя, характерны два обстоятельства.

1. Если прежде геометрия изучала только пространственные формы и отношения материального мира, то теперь ее предмет составляют многие другие формы и отношения, лишь сходные с пространственными и поэтому допускающие использование геометрических методов. В связи с этим термин «пространство» приобрел в математике новый, более широкий и в то же время более специальный смысл. Одновременно сами методы геометрии стали богаче и разнообразнее. Они представляют собой более совершенные средства познания и того окружающего нас физического пространства, от которого была абстрагирована геометрия в ее первоначальном виде. Это обстоятельство отражается в следующем замечании В. И. Ленина: «Математика, по-

степенно удаляясь от пространств, доступных чувственному восприятию, и возвышаясь до пространства геометрического, не удаляется, однако, от реального пространства, т. е. от истинных отношений между вещами. Она скорее приближается к ним» (*Ленин В. И.* Полн. собр. соч., т. 29, с. 482).

2. Появляется новый подход к самим исследуемым свойствам геометрических фигур, сформулированный впервые Ф. Клейном в 1872 г. в его знаменитой Эрлангенской программе. Геометрия рассматривается Клейном как теория инвариантов некоторой группы преобразований. Отсюда сразу же следует возможность существования различных геометрий, соответствующих различным группам преобразований.

Развитие геометрии в разных направлениях продолжается, и предметом ее рассмотрения служат все новые и новые «пространства»: пространство Лобачевского, проективное пространство, евклидово и другие пространства различного числа измерений, римановы пространства, топологические пространства и т. д. Теории этих пространств находят важные применения как в самой математике, так и в физике и механике, причем особенно замечательным является их применение в теории относительности.

Широкое развитие получила в последнем периоде и алгебра. Начиная с исследований арифметических операций в числовых множествах, современная алгебра, сохраняя полученные результаты как основу, переходит к исследованию операций, лишь сходных по своим формальным свойствам с обычными арифметическими операциями, причем в множествах, элементы которых не обязательно числа, а объекты произвольной природы. Понятия, методы и результаты современной алгебры находят широкие и весьма существенные применения в анализе, геометрии, физике, кристаллографии и т. д.

Глубокие сдвиги произошли в области анализа. Были уточнены его основания, в частности построена строгая теория действительного числа, уточнены понятия функции, предела, интеграла. Это уточнение относится к тому же периоду, что и новое развитие алгебры и геометрии, и в известной мере было завершено к 80-м гг. прошлого столетия немецкими математиками Вейерштрассом, Дедекиндом и Кантором. Последний, как известно, положил начало теории множеств, впоследствии ставшей одной из общих основ современной математики. Из анализа выделились в особые области теория функций действительного переменного, кон-

структивная теория функций, теория функций комплексного переменного, качественная теория дифференциальных уравнений, теория интегральных уравнений и т. д.

На почве развития анализа и математической физики в соединении с новыми идеями геометрии и алгебры возникла новая обширная область — функциональный анализ.

Создание первой неевклидовой геометрической системы Лобачевским и Больяем послужило стимулом к глубоким исследованиям в области оснований математики. Предметом этих исследований был главным образом аксиоматический метод построения математических теорий. Возникла новая область науки, занимающаяся изучением построения математических теорий, названная Гильбертом *метаматематикой* или *теорией доказательства.* Исследование проблем оснований математики послужило стимулом для дальнейшего быстрого развития математической логики, *начала которой были разработаны только в середине XIX в.*, хотя идею о возможности и целесообразности математизации логики высказал еще в XVII в. Лейбниц.

Во все времена технический уровень средств вычислений оказывал существенное влияние на сами математические методы. Однако до 40-х гг. XX в. эти средства оставались весьма ограниченными. Они обеспечивали более или менее быстрое выполнение отдельных операций. Но доведение до численного результата практически возникающих задач современной науки и техники требует подчас огромного числа операций, выполняемых по сложной программе, зависящей иногда от промежуточных результатов. Решение таких задач оказывалось практически недоступным или же полностью обесценивалось длительностью процесса решения.

Возникшие в 40-х гг. XX в. современные электронные вычислительные машины (ЭВМ) позволяют вести вычисления с исключительно высокой скоростью (вначале сотни, а теперь уже миллионы операций в секунду) и при этом автоматически проводить сложные цепи вычислений по заранее составленным весьма гибким программам. ЭВМ способны решать не только традиционные математические задачи, но и задачи более широкого класса, возникающие в различных отраслях деятельности человека (управление технологическими процессами, перевод текста с одного языка на другой и др.), которые таким образом становятся «математическими» задачами в весьма широком смысле. Эти «способности» ЭВМ по существу были стимулом для возникновения и развития комплексного научного направ-

ления, занимающегося проблемами управления и связи, известного под названием *кибернетика.*

В теоретической кибернетике находят применение теория вероятностей и математическая логика. Потребности кибернетики вызвали к жизни новые области современной математики: теорию игр и теорию информации. ЭВМ и кибернетика способствовали тому, что разделы математики, не связанные с представлением о бесконечных множествах, пределах и непрерывности, иногда объединяемые собирательным термином «конечная» или «дискретная» математика, представляются нам теперь более содержательными и важными, чем это казалось математикам конца прошлого или начала нашего века.

1.3. Академик А. Н. Колмогоров в статье «Современные взгляды на природу математики» кратко описывает концепцию «современная математика» следующими двумя тезисами:

«А. В основе всей математики лежит чистая теория множеств.

Б. Специальные разделы математики занимаются структурами, принадлежащими к тем или иным специальным родам структур. Каждый род структур определяется соответствующей системой аксиом. Математика интересуется только теми свойствами структур, которые вытекают из принятой системы аксиом, т. е. изучает структуры только с точностью до изоморфизма» (Математика в школе, 1969, № 3, с. 12).

Теперь обратимся снова к классическому определению предмета математики с целью выяснения, в какой мере оно характеризует и современную математику. Существенное расширение предмета, характерное для современной математики, выводит ее за рамки первоначального понимания количественных отношений и пространственных форм.

Структуры, изучаемые современной математикой, могут порождаться в множествах различной природы отношениями, отличными от количественных, и приводить к формам, отличным от пространственных в обычном их понимании.

Фигуры в многомерных, в том числе бесконечномерных, пространствах — это не пространственные формы в обычном смысле, как мы их понимаем, когда имеем в виду физическое пространство, а абстрактные объекты математики. Однако эти объекты имеют реальный смысл и отражают в отвлеченном виде определенные формы действительности, лишь сходные с пространственными.

Другим примером выхода математики за пределы пространственных форм и количественных отношений в первоначальном смысле этих слов может служить возникновение математической логики, достигшей теперь широкого развития. Предметом ее исследований является строение математических выводов. Иными словами, она изучает, какие предложения можно выводить из данных посылок данными средствами. Она исследует свой предмет, как это свойственно математике, в полном отвлечении от содержания и поэтому заменяет предложения формулами, а правила вывода — правилами оперирования с этими формулами.

Отношения между посылками и заключениями, аксиомами и теоремами, разумеется, не сводятся к количественным отношениям в обычном смысле этого слова. Такие отношения лишь сходны с количественными, и это сходство открыло возможность применения математических методов к их исследованию.

Итак, расширение предмета математики ведет к существенному расширению самого понятия количественных отношений и пространственных форм.

Определение Энгельса применимо и к предмету современной математики, если содержащееся в нем выражение «количественные отношения и пространственные формы» понимать в более широком смысле, чем оно понималось в период классической математики (включая в этот смысл отношения и формы, лишь сходные с количественными отношениями и пространственными формами в собственном смысле этих слов). Это сходство состоит в том, что некоторые отношения и формы действительности объективно обладают такой же степенью безразличия к содержанию, как и количественные отношения и пространственные формы, и как последние могут быть отвлечены от содержания и определены в общем виде с такой же ясностью и точностью, с сохранением такого богатства связей, чтобы служить основанием для чисто логического развития теории. Если такие отношения и формы называть «количественными отношениями и пространственными формами» в широком смысле, то определение Энгельса адекватно характеризует предмет современной математики.

2. Цели обучения математике

2.1. При определении целей обучения математике мы исходим из общих целей обучения и воспитания в советской школе, из задачи всестороннего развития личности,

т. е. воспитания человека высокообразованного, знающего законы развития природы и общества и на этой основе сознательно преобразующего мир.

Среднее образование должно обеспечить *прочное знание основ наук, усвоение принципов коммунистического мировоззрения, трудовую и политехническую подготовку* в соответствии с возрастающим уровнем развития науки и техники, с учетом потребностей общества, способностей и желаний учащихся, а также нравственное, эстетическое и физическое воспитание здорового подрастающего поколения. Успешное решение всех этих задач обеспечивает достижение целей коммунистического воспитания.

2.2. Наряду с общими целями обучения и воспитания в нашей школе для определения целей обучения математике необходимо учесть место и роль математики в современной науке, технике и производстве, ее значение в жизни современного общества.

Уже в настоящее время, тем более в будущем, учитывая тенденции развития науки и техники, экономики и производства, трудно будет найти такую область человеческой деятельности, активное участие в которой не требовало бы определенной математической подготовки (причем не сводящейся к четырем арифметическим действиям). Во все более широких масштабах труд становится квалифицированным, умственным, требует непрерывной работы мысли, анализа сложных процессов, правильных логических выводов.

Наше общество нуждается и в будущем еще больше будет нуждаться в людях с навыками четкого логического мышления, с хорошими математическими знаниями и умением видеть и реализовать возможности применения математики в различных конкретных ситуациях.

Формирование и развитие этих качеств осуществляется обучением в средней и высшей школе. Но главная роль принадлежит несомненно средней школе. Если обучение в средней школе не формирует и не развивает (в определенной степени) эти качества, то высшая школа оказывается бессильной восполнить образовавшийся пробел.

2.3. Исходя из общих целей обучения и воспитания, из специфики математики как науки, ее роли и места в современной системе наук, в технике и производстве, ее значения в жизни современного общества, можно следующим образом сформулировать *цели обучения математике* в средней общеобразовательной школе:

1) развитие математического мышления учащихся;

2) приобретение ими глубоких и прочных теоретических знаний элементарных начал математической науки, необходимых для продолжения образования в высшей школе и для практической деятельности, а также умения и навыков применения этих теоретических знаний в различных конкретных ситуациях;

3) понимание учащимися научных основ современной техники и современного производства, разумеется, в той части, в которой это касается использования математических методов в технике и на производстве (политехническое образование) [1].

Воспитание в процессе обучения математике является следствием постановки обучения и имеет своими главными источниками содержание и методы обучения. Излагаемая дальше теоретическая концепция обучения математике обеспечивает реализацию основных воспитательных функций обучения предмету.

2.4. Необходимо отметить, что, перечисляя цели обучения математике, на первое место мы поставили *развитие* (мышления, мыслительной деятельности) учащихся.

Разумеется, перечисленные цели взаимосвязаны. Нельзя достичь необходимого развития без приобретения определенных знаний, но и развитие не является простым следствием усвоения определенной суммы знаний. Можно приобрести большой запас знаний и не получить существенного умственного развития.

Определенное развитие возможно лишь в результате специально построенного, ориентированного на достижение этого развития обучения. Поэтому мы и выделили развитие определенных структур мыслительной деятельности, объединяемых под названием «математическое мышление», в качестве специальной и первой цели обучения математике.

3. Математика как учебный предмет

3.1. Исходя из сформулированных целей обучения математике, учебный предмет «Математика» должен содержать «элементарные начала» математической науки, необходимые как для продолжения образования (в том числе и математического) в высшей школе, так и для практической деятельности.

---

[1] В этой формулировке имеются выражения («математическое мышление», «элементарные начала математической науки» и др.), нуждающиеся в уточнении.

Здесь возникает ряд вопросов: как определить, что следует отнести к «элементарным началам математики»; можно ли определить раз и навсегда эти «начала», т. е. содержание обучения математике, или они неизбежно меняются; от чего зависит в последнем случае и как возникает необходимость изменения содержания обучения?

В дальнейшем попытаемся ответить на эти вопросы.

3.2. Обычно говорят, что в школе изучается «элементарная математика». Однако с применением этого термина часто связаны недоразумения, ввиду того что он используется для обозначения двух различных понятий. С одной стороны, этим термином обозначают всю математику до XVII в., т. е. «совокупность таких разделов, задач и методов математики, в которых не пользуются общими понятиями переменной, функции, предела и тем более общим понятием множества», с другой — школьный предмет, т. е. «совокупность математических дисциплин, изучаемых в средней общеобразовательной школе».

Чтобы избежать в дальнейшем смешения этих двух понятий, назовем элементарную математику в первом смысле «традиционной» и обозначим сокращенно ТЭМ. Элементарную математику во втором смысле, т. е. как предмет школьного обучения в современном понимании, назовем «современной» и обозначим сокращенно СЭМ.

3.3. В ТЭМ входят известные разделы математики — арифметика, геометрия, алгебра и тригонометрия, в основном сформировавшиеся во втором периоде, т. е. в течение более двух тысячелетий, до XVII в. Разумеется, в это же время в ТЭМ уже возникли идеи, которые привели к созданию дифференциального и интегрального исчислений. Однако до XVII в. развивалась именно та математика, которая впоследствии стала называться «элементарной» в отличие от математики следующего периода, которая получила название «высшей».

Таким образом, термин «элементарная математика» в смысле ТЭМ имеет лишь историческое значение и соответствует математике определенного периода. Следует отметить, что этот термин не входит в современную научную математическую номенклатуру, но основные разделы ТЭМ включаются в определенные разделы математики (арифметика — в теорию чисел, элементарная геометрия — в геометрию, элементарная алгебра — в алгебру, теория тригонометрических функций — в анализ).

3.4. Нас интересует элементарная математика во втором смысле, т. е. СЭМ.

Математика как предмет школьного обучения с течением времени неизбежно меняет свое содержание под влиянием развития математической науки и потребностей общества, оставаясь, однако, в определенном смысле «элементарной».

Слово «элементарный» имеет различные смысловые значения, в частности следующие два: «начальный, относящийся к основам чего-нибудь» и «упрощенный, ограниченный, поверхностный».

Элементарная математика как предмет школьного обучения характеризуется двумя существенными признаками, связанными с указанными смысловыми значениями слова «элементарный». Она должна быть «элементарной», во-первых, в смысле начальной, составляющей основы современной математической науки, и, во-вторых, в смысле достаточно простой, доступной для учащихся средней школы. Эти признаки характеризуют в некоторой степени понятие СЭМ, не составляя, разумеется, его строгого определения. К тому же эти признаки разнородны по своему характеру. Первый признак, требующий, чтобы к СЭМ было отнесено все то из современной математики, что составляет ее основы, имеет логико-математический характер. Второй признак, требующий, чтобы все, относимое к СЭМ, было достаточно простым и понятным учащимся, носит ярко выраженный психолого-педагогический характер.

Следует отметить, что проверка наличия второго признака связана с большими трудностями, так как «элементарность» в смысле простоты, доступности зависит не только от самого учебного материала, но и от принятого способа изложения этого материала. Простой материал может оказаться трудным и недоступным для учащихся в результате неудачно выбранного способа изложения, и, наоборот, сложный материал может быть изложен просто и доступно, на соответствующем пониманию школьников логическом уровне.

Под СЭМ мы понимаем не только и не столько традиционное содержание школьного обучения математике, сколько то новое содержание, которое находится в стадии разработки и станет предметом будущей педагогической деятельности тех, кому предназначено настоящее пособие.

В течение последних двух-трех десятилетий вопрос о содержании СЭМ широко обсуждался в международном плане в связи с проблемой модернизации математического образования.

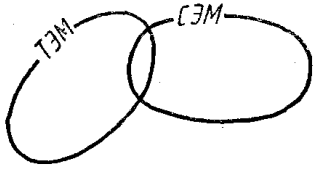


Рис. 1

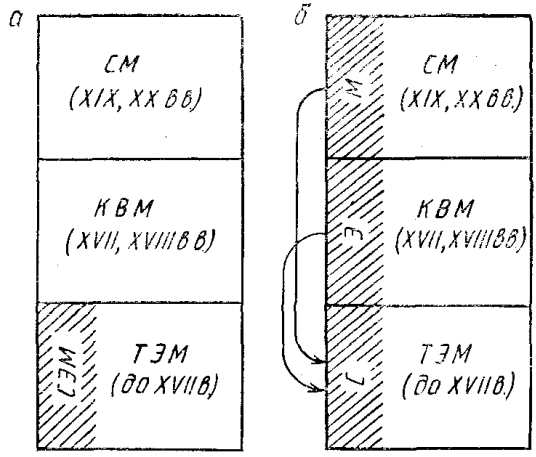


Рис. 2

3.5. Отметим в заключение, что два понятия — ТЭМ и СЭМ — находятся в отношении пересечения (рис. 1).

Многие вопросы, относящиеся к ТЭМ, не входят в школьный предмет математики, так как не имеют общеобразовательного или практического значения или же не удовлетворяют хотя бы одному из приведенных признаков (следует отметить, что многие вопросы ТЭМ вовсе не «элементарны», т. е. просты, доступны для учащихся, по крайней мере менее элементарны, чем некоторые вопросы так называемой «высшей», т. е. «неэлементарной» математики). С другой стороны, многие вопросы, которые уже входят в наши школьные программы (элементы дифференциального и интегрального исчислений), не относятся к ТЭМ.

Ошибочное отождествление двух понятий — ТЭМ и СЭМ — или мнение о том, что СЭМ не может и не должна выйти за рамки ТЭМ, часто является причиной, тормозящей развитие среднего математического образования.

Если изобразить отношение между школьным предметом и математикой как наукой, соответствующее такому представлению, то получим следующую схему (рис. 2, *а*), на которой заштрихованная область, изображающая школьную математику, не выходит за рамки ТЭМ, т. е. никакие понятия, идеи, методы классической высшей математики (КВМ) и современной математики (СМ) не находят отражения в школьном преподавании.

В действительности же такое положение было нормальным лишь до XVII в., когда вся математика сводилась к ТЭМ. Каждый новый период в развитии математики вызы-

вает необходимость в пересмотре содержания и методов обучения.

Вполне естественно считать, что отношение между СЭМ и математикой как наукой в настоящее время должно соответствовать схеме, изображенной на рис. 2, *б*. Заштрихованная на этой схеме область изображает те элементарные начала математики как науки, которые должны составлять предмет современного школьного обучения.

2. МОДЕРНИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ (ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ)

1. Движение за модернизацию математического образования

1.1. Модернизация дословно означает «осовременивание», приведение в соответствие с современными идеями, методами, требованиями и т. д.

Хотя движение за модернизацию математического образования началось давно, примерно сто лет назад, однако особый размах оно получило в 50—60-х гг. и охватило в той или иной степени почти все развитые страны мира. В конце 70-х гг. возникла волна критических выступлений, касающихся некоторых отрицательных аспектов модернизации.

Обзор движения за реформу математического образования в различных странах и в международном масштабе содержится в докладах Международной комиссии по математическому образованию (МКМО), представленных Эдинбургскому (1958), Стокгольмскому (1962) и Московскому (1966) международным конгрессам математиков, в подготовленном ЮНЕСКО издании «Новые тенденции в преподавании математики на среднем уровне» и во многих других работах.

Изучение всех этих материалов показывает, что большинство проектов реформы рекомендует для изучения в средней школе четыре области современной математики: 1) элементарную теорию множеств; 2) введение в математическую логику; 3) понятия из современной алгебры (в частности группы, кольца, поля и векторы); 4) введение в теорию вероятностей и статистику. В отдельных проектах предлагалось также изучение векторных пространств и линейной алгебры, отношений эквивалентности и порядка,

введение в элементарную топологию и неевклидовы геометрии и др.

Совершенно очевидно, что введение этих вопросов в школьные программы невозможно из-за недостатка времени. Здесь необходим тщательный отбор.

1.2. В большинстве случаев главным предметом исследования и обсуждения являлось содержание математического образования.

Это вполне понятно, так как без определения вопроса «чему учить» нельзя решать и вопрос «как учить». Однако было бы глубоким заблуждением считать, что модернизация математического образования сводится лишь к обновлению содержания обучения путем включения в школьные программы некоторых вопросов современной математики при инвариантности методов обучения и трактовки традиционного материала.

В действительности же речь идет не только и, пожалуй, не столько о преподавании в школе современной математики, сколько о *современном преподавании математики.* Все же немногое из традиционного содержания школьного курса может быть исключено из программ и не очень многое из современной математики может быть включено в программы. Однако традиционные методы обучения математике устарели не только по отношению к тому новому содержанию, которое предлагалось включить в школьные программы, но и по отношению к тому материалу, который давно уже составляет предмет школьного обучения. Это объясняется, в частности, тем, что и материал ТЭМ строится в настоящее время на базе идей и методов современной математики, в то время как его традиционная школьная трактовка основана на идеях и методах классической элементарной математики, т. е. математики до XVII в.

Однако учебная литература в период активизации движения за модернизацию, как правило, страдала некоторыми дефектами: превышала допустимый уровень абстрактности школьной математики, значительно расширив при этом изучение теории с одновременным сужением разнообразия решаемых задач, особенно прикладных.

1.3. В связи с широким развитием движения за модернизацию математического образования, естественно, возникает вопрос: чем объяснить, что в течение многих десятилетий школьные программы, оставаясь почти неизменными, не приводили к такому разрыву между школьным образованием и наукой, как в последнее время, когда неизбеж-

ность глубокой реформы математического образования стала очевидной?

Это объясняется тем, что, хотя математика развивалась гигантскими шагами, в течение XVIII и первых трех четвертей XIX в. она была в своей основе «классической», т. е. ее основные концепции не отличались от изучаемых (разумеется, на соответствующем логическом уровне) в средней школе. Продвижение, развитие науки происходило «на высоте», а ее элементарные основы оставались неизменными, что не влияло на изучение материала в школе. Но развитие в этом смысле было подобно достраиванию новых этажей здания, стоящего на старом, не рассчитанном на такое достраивание, фундаменте. В конце концов для обеспечения дальнейшего прогресса науки стала неизбежной перестройка ее основ.

В свете новых концепций, которые были разработаны в конце XIX — начале XX в. и легли впоследствии в основу современной математики, стало совершенно ясно, что начальное и среднее математическое образование со своими неизменными программами и методами полностью оторвано от современной математической науки, от ее фундаментальных концепций, идей, методов и языка, от ее приложений. Так как образовавшийся разрыв обусловлен различием в основах школьного предмета и современной науки, он относится не только к среднему, но и к начальному математическому образованию. Следует отметить, что все попытки устранить этот разрыв путем реформы содержания и методов обучения в старших классах или в V—VI классах оказались малоэффективными и в конце концов исследователи вынуждены были обратиться в начальные классы.

1.4. В соответствии с многовековой традицией содержание начального обучения математике сводилось к четырем арифметическим действиям над натуральными числами. По существу единственная цель преподавания на этом этапе состояла в обучении счету, и это наблюдалось повсеместно. В некоторых странах до сих пор учебные книги для младших классов носят название «Книга для счета» («Rechenbuch») или просто «Счет» («Calcul»).

Это положение могло считаться нормальным тогда, когда от выпускников школы требовалось лишь умение решать арифметические задачи. Сейчас же к математической подготовке выпускников школы предъявляются несравненно более высокие требования.

До последнего времени (еще 20—25 лет тому назад) считалось, что дети 7—10 лет в силу своих «возрастных осо-

бенностей» не в состоянии понять из математики ничего, кроме четырех арифметических действий, и поэтому традиционное содержание начального обучения математике незыблемо и никакой модернизации не подлежит. Однако это содержание очень бедно идеями, для того чтобы оно могло служить удовлетворительной основой математического образования, отвечающего современным требованиям. Именно это побудило многих психологов, математиков и педагогов к проведению ряда экспериментов. К таким исследованиям можно отнести в нашей стране: эксперименты психологов В. В. Давыдова и Б. Д. Эльконина (Институт психологии АПН СССР); математика профессора А. И. Маркушевича и группы сотрудников Сектора обучения математике Института содержания и методов обучения АПН СССР; группы математиков Сибирского отделения АН СССР и др.; за рубежом: эксперименты Е. Г. Бигла, П. Саппса, Р. Дэвиса и других ученых из различных университетов США; математика и психолога З. П. Дьенеша, работавшего в Англии, Австралии, Канаде, английского педагога-математика Дж. Метьюза и др.

Эти эксперименты, существенно отличаясь друг от друга направлением поисков и предлагаемым обновленным содержанием обучения (в некоторых случаях это содержание не представляется необходимым с точки зрения идей современного математического образования), имеют одну общую положительную сторону: они опровергают господствовавшее мнение о невозможности модернизации начального обучения математике. Эти исследования доказали, во-первых, что дети 7—10 лет способны понять намного больше, чем мы думали, и, во-вторых, что начальное обучение математике (именно математике, а не арифметике) может быть идейно содержательным, так как удается перевести важные идеи современной математики на язык, доступный детям этого возраста.

При всем этом обучение счету остается одной из главных целей начального обучения математике (но отнюдь не единственной), и достигается эта цель с помощью задач, интересных не только с точки зрения каждодневной практики, но и их математического содержания.

1.5. Несомненный интерес для дальнейшего развития начального обучения математике имеют работы и эксперименты З. П. Дьенеша. Любопытно, что его первая теоретическая работа относилась к проблеме эстетического воспитания.

Построение в обучении математических структур, по-

знание как результат собственной мыслительной деятельности и радость творческого труда учащихся — все это сближает обучение математике с эстетическим воспитанием учащихся.

Одна из основных идей, развиваемых Дьенешем, состоит в том, что в обучении математике дети должны опираться на свой собственный опыт, а не на опыт учителя. Другая, не менее важная идея состоит в том, что действительное улучшение вычислительных и прочих математических навыков учащихся возможно лишь достижением понимания ими основных понятий и идей математики, а не путем бессознательного развития техники арифметических вычислений и алгебраических преобразований. Дьенешем разработаны оригинальные дидактические материалы, с помощью которых он развивает важные математические и логические понятия у детей младшего возраста (начиная с пятилетнего (!)

Психолого-педагогические исследования приводят к выводу о целесообразности как можно более раннего обучения логическим операциям. Логическое воспитание должно начинаться с первого класса, даже еще раньше, составляя своеобразное «введение в математику» (это так же важно, если не важнее, чем дошкольное обучение счету и чтению). Формирование первых логических понятий на возможно более ранней ступени обучения имеет общеобразовательное и воспитательное значение, выходящее за рамки их применения к изучению собственно математического материала.

Однако маленьких детей 5—7 лет нет возможности обучать логике прямым путем. Естественно, возникает потребность в разработке специальной методики ранней логической пропедевтики.

Первый конгресс по преподаванию математики, организованный МКМО (1969), уделил большое внимание рассмотрению методов, позволяющих развивать как можно раньше логическое мышление (сообщения Б. Христьянсен (Дания), В. Серве (Бельгия) и др.) и образовать у детей определенные логические навыки (автоматизмы).

Проведенные в этом направлении поиски обнаружили возможность раннего обучения логике с помощью игр. Игра — подходящая форма для обучения маленьких детей. Однако далеко не всякие игры, называемые логическими, обучают логике.

Наиболее подходящим и естественным исходным материалом для ранней логической пропедевтики являются множества конкретных предметов и элементарные операции над ними. Естественно поэтому, что и мыслительная дея-

тельность детей развивается от действий над конкретными множествами к логическим операциям над предложениями, выражающими характеристические свойства этих множеств.

Идея использования множеств предметов, носителей различных свойств (формы, цвета, величины, толщины) для ранней логической пропедевтики была высказана советским психологом Л. С. Выготским и реализована З. П. Дьенешем в дидактическом материале, известном под названием «логические блоки» (или «блоки Дьенеша»).

Логические блоки могут эффективно использоваться для обучения детей 5—10 лет посредством системы игр и задач. Это подтверждено и экспериментальным обучением шестилетних детей по методике, разработанной в лаборатории обучения и умственного развития детей дошкольного и младшего школьного возраста при Могилевском педагогическом институте.

1.6. Традиционные содержание и методы глубоко укоренились в школьном обучении. Модернизация, разумеется, не означала отказа от всего традиционного. Однако многие из тех традиций, которым подчинено обучение в школах, потеряли в настоящее время всякий смысл. На необходимость отказаться от бессмысленных традиций в школьном обучении математике указывал еще выдающийся советский математик и педагог А. Я. Хинчин. Приведем его слова, которые остаются актуальными и сегодня: «Наше желание — по мере возможности придать в школьном обучении каждому термину то значение, которое ему свойственно в современной науке, понятно и не нуждается в оправданиях. Здесь никакие ссылки на античные традиции не могут служить возражением,— и так уж слишком долго мы ориентируем наши школьные курсы математики на античные образцы, игнорируя весь прогресс науки...» (Математика в школе, 1941, № 2, с. 14).

Наиболее ярким примером такого «античного образца», на который школьное обучение ориентируется в течение двух тысячелетий, является евклидова система построения геометрии. Хотя так называемые «евклидовы» традиции в геометрии в настоящее время уже потеряли свое первоначальное значение и очевидно, что и в педагогическом отношении может быть найдена более рациональная система построения школьной геометрии, отказаться полностью от них в обучении многим кажется трудно и опасно.

Проблема преподавания геометрии остается одной из наиболее сложных проблем модернизации среднего математического образования. Она вызвала широкую между-

народную дискуссию и появление многочисленных проектов. Сложность этой проблемы объясняется многими обстоятельствами. Укажем три из них, представляющиеся весьма важными.

1. Традиционная система построения школьной геометрии по Евклиду или в логически совершенной форме по Гильберту (эту систему называют также евклидово-гильбертовой) громоздка и изолирует геометрию от остальной математики, препятствуя проникновению в нее современных идей, на базе которых может быть осуществлено более рациональное и простое построение геометрии. К тому же евклидово-гильбертова система потеряла и всякую научную ценность. Поэтому распространилось мнение о необходимости отказаться от нее.

2. Все (или почти все) геометрические знания, которые нужны для каждодневной практики, могут быть приобретены учащимися в течение первых 5—6 лет обучения в пропедевтическом курсе геометрии, построенном на базе широкого использования опыта и основанной на нем интуиции. Естественно возникает вопрос: каковы же цели дальнейшего изучения геометрии в средних и старших классах школы?

Очевидно, что по крайней мере главная (если не единственная) цель изучения геометрии в этих классах — введение в дедуктивный метод, осознанное изучение дедуктивной системы геометрии, которое должно более интенсивно влиять на развитие логики мышления учащихся и выработку у них специфического для математики стиля мышления, характеризуемого, по выражению А. Я. Хинчина, доведенным до предела доминированием логической схемы рассуждения над его содержанием.

Именно эта цель и слабость евклидово-гильбертовой системы для ее достижения привели к многочисленным современным поискам пригодной для школьного преподавания аксиоматической системы геометрии, т. е. в разработке новых систем или модификации и приспособлении (дидактической обработке) известных систем (Вейля, Бахмана, Шоке и др.), или, наконец, в усилении евклидово-гильбертовой системы включением элементов координатной (аналитической) геометрии и векторной алгебры.

3. Сложность проблемы объясняется и важным психологическим фактором. Как видно, речь идет не о каких-то частичных изменениях локального характера (т. е. в трактовке отдельных понятий или в изложении отдельных тем), а о реализации совершенно нового построения всей школьной геометрии. Именно новое, современное построение гео-

метрии, даже если оно намного проще традиционного, вызывает затруднения прежде всего у учителей, а вследствие этого и у учащихся (иногда по этой причине проверяемая новая система построения геометрии объявляется непригодной или учебник, реализующий это построение,— недоступным для школьного обучения).

Это явление вполне объяснимо. Учитель, преподававший геометрию по традиционной системе 10—15 лет (не говоря уж о том, что он сам обучался по этой системе), уже мыслит в соответствии с этой системой, и перестроить свое мышление — дело отнюдь не легкое.

2. Деятельность по модернизации математического образования в нашей стране

2.1. В СССР работа по модернизации среднего математического образования началась несколько позднее, чем в западных странах. Следует отметить, что важным фактором в интенсификации этой работы явилось создание комиссии АН СССР и АПН СССР по определению содержания математического образования во главе с академиком А. Н. Колмогоровым.

Теоретическая и экспериментальная работа по модернизации математического образования велась в нашей стране многопланово: с расчетом на ближайшее будущее и более далекую перспективу, со всеми учащимися или только с частью их. Комиссия по математическому образованию (в дальнейшем КМО) разработала проект новой программы по математике для средней школы (с IV по X классы) и организовала работу по подготовке новых учебников.

Комиссия по определению содержания обучения математике в начальных классах на основе проектов, представленных Институтом общего и политехнического образования и Институтом психологии АПН, а также Ленинградским педагогическим институтом им. А. И. Герцена, составила проект программы по математике для I—III классов, который после некоторых изменений был утвержден в качестве новой программы для начальных классов.

Переход школы на новые программы по математике начался в 1969 г.

2.2. Не подвергая детальному анализу программу начального обучения математике (1969), отметим лишь некоторые ее положительные и отрицательные стороны.

1. Знаменательно, что учебный предмет в начальных классах именовался «математика» (вместо «арифметика»),

хотя, разумеется, главное не в названии, а в содержании, которое еще не приведено в соответствие с этим названием в рамках возможного на данном этапе обучения.

2. Программа содержала более рациональное развитие материала и укладывала начальное обучение математике, включая весь материал прежней программы по арифметике, в три года вместо четырех.

Возврат к четырехлетней начальной школе обосновывается в «Основных направлениях реформы общеобразовательной и профессиональной школы» тем, что он позволит обеспечить более основательное обучение детей чтению, письму и счету, элементарным трудовым навыкам, одновременно уменьшить нагрузку учащихся и облегчить последующее усвоение основ наук.

3. Программа 1969 г. содержала намного больше, чем старая программа, геометрического материала, что, возможно, оказало положительное влияние на подготовку учащихся к усвоению систематического курса геометрии.

4. Включение некоторых элементов алгебраической пропедевтики в программу было некоторым шагом в сторону алгебры.

5. Авторы программы считали, что она в известной мере близка старой программе и вместе с тем предусмотренный ею начальный курс математики (для I—III классов) является органической частью курса математики средней школы. Представляется, что первое удалось авторам намного лучше, чем второе.

2.3. При всех своих недостатках введенная в 1969 г. программа несомненно лучше старой и в сочетании с хорошими учебниками и обновленной дидактикой представляла значительный шаг в направлении усовершенствования и повышения эффективности начального обучения математике. Однако реализацию этой программы в учебниках для начальных классов (М. И. Моро и др.) нельзя признать удачной. Основной недостаток этих учебников состоит в том, что они преподносят новое содержание обучения старыми методами. Это приводит к существенным затруднениям в преподавании математики в начальных классах, которые неправильно объясняются как следствие недоступности программы для учащихся. Однако эта «недоступность» присуща не самой программе, а ее реализации в учебниках.

Введенная программа вполне доступна в иной реализации, основой которой должна быть современная дидактика, ориентированная прежде всего на формирование и разви-

тие определенной мыслительной (математической) деятельности детей.

Реформа школы поставила задачу постепенного перехода к школьному обучению детей с шестилетнего возраста. В связи с этим на стыке дошкольного и школьного обучения возникают актуальные проблемы ЧЕМУ и КАК УЧИТЬ, т. е. проблемы содержания и методов предматематической подготовки шестилетних детей. Правильное решение проблем начального обучения математике является предпосылкой для решения проблем среднего математического образования в целом.

2.4. Программы по математике для IV—X классов общеобразовательной школы, опубликованные в 1968 г., были утверждены Министерством просвещения СССР лишь в качестве основы для создания новых учебников и экспериментального преподавания.

Создание программы (под программой будем иметь в виду программы по математике для IV—X классов) было важным, но лишь первым этапом рассчитанной на длительное время работы по обновлению и совершенствованию среднего математического образования, приобретающей особое значение в связи с начавшейся реформой школы.

В программу по мере ее внедрения были внесены многочисленные изменения, главным образом в направлении ее разгрузки, исключения новых тем. Так, были исключены содержавшиеся в первоначальном проекте комбинаторика и начала теории вероятностей, системы счисления, сведения об ЭВМ и программировании. К сожалению, исключенными оказались именно те вопросы, которые открывают путь к современным важным приложениям математики.

2.5. Вполне понятно, что разработка школьной программы — лишь небольшая, хотя и весьма важная часть работы по обновлению и усовершенствованию математического образования. Успех программы зависит от многих факторов, среди которых первостепенное значение имеет ее реализация в учебниках.

По истечении 10 лет со времени появления программы в 1968 г. необходимо было подвести некоторые итоги и наметить дальнейшие пути совершенствования среднего математического образования. В связи с этим развернулась дискуссия, достигшая своего апогея публикацией статьи академика Л. С. Понтрягина «О математике и качестве ее преподавания» (Коммунист, 1980, № 14, с. 99—110), в которой школьные программы и учебники по математике подвергаются суровой, во многом и справедливой критике.

Первым результатом развернувшейся дискуссии по проблемам содержания среднего математического образования явилась разработка базисной программы содержания математического образования в средней школе (Математика в школе, 1981, № 4, с. 7—15), одобренной Президиумом АПН СССР, Бюро отделения математики АН СССР и утвержденной Министерством просвещения СССР. Эта базисная программа должна служить основой для работы по совершенствованию действующих и созданию новых учебников, для разработки конкретной учебной программы с указанием последовательности изучения материала и отводимого на него времени с учетом требований реформы школы.

Программа 1981 г. (базисная) состоит из двух разделов: требования к математической подготовке учащихся (задающего обязательный уровень подготовки учащихся по курсу математики); содержание обучения (фиксирующего стабильный минимальный объем материала, обязательного для изучения в школе).

2.6. Потребности дальнейшего развития науки, техники, производства и культуры поставили перед обществом важную задачу — использовать индивидуальные способности учащихся, получить уже в стенах школы более широкую подготовку и глубокие знания в той области науки, к которой они проявляют больший интерес.

Целесообразность и значение такого дифференцированного обучения в старших классах, учитывающего интересы и склонности учащихся, доказаны, в частности, двадцатилетним опытом работы существующих у нас (теперь уже нескольких типов) школ с математической специализацией.

Небольшое число школ с математической специализацией возникло при известных научных центрах (Сибирском отделении АН СССР, Московском, Ленинградском, Киевском университетах) и предназначено для учащихся, проявивших особые способности (одаренность) в области математики. Эти учащиеся выявляются с помощью специальной системы отбора (математических олимпиад, летней математической школы-лагеря и др.) из учеников не только городских, но и сельских школ различных, в том числе и наиболее отдаленных от научных центров районов нашей страны. Очевидно, что и в дальнейшем число математических школ такого типа останется небольшим.

2.7. Программа 1968 г. и программа 1981 г. (базисная) содержат обязательный для всех учащихся минимум учебного материала. Существенно новыми для нашей школы

явились факультативные занятия, цель которых — углубление знаний по естественным (в том числе физико-математическим) и гуманитарным наукам, а также развитие разносторонних интересов и способностей учащихся.

Факультативные занятия по математике предполагались двух видов: 1) изучение дополнительных глав и вопросов математики, цель которого состоит в расширении и углублении знаний учащихся по обязательной для всех программе, и ознакомление с разделами, примыкающими к программным или раскрывающими приложения математики; 2) небольшие специальные курсы, знакомящие учащихся (в основном старших классов) с некоторыми областями современной математики (программирование, вычислительная математика, векторная алгебра и линейное программирование, математическая логика и др.).

В «Основных направлениях реформы общеобразовательной и профессиональной школы» предусматривается предоставление учащимся VIII—XI классов возможности углубленного изучения по их выбору отдельных предметов физико-математического, химико-биологического и общественно-гуманитарного циклов с помощью факультативных занятий.

Таким образом повышается роль факультативных занятий, с помощью которых будет осуществляться дифференцированное обучение учащихся VIII—XI классов с учетом их склонностей и интересов.

3. Дискуссионные вопросы и связанные с ними проблемы

За пять лет (1978—1982) журнал «Математика в школе» опубликовал ряд статей по вопросам школьного преподавания математики известных советских математиков академиков А. Н. Колмогорова, В. С. Владимирова, Л. С. Понтрягина, А. П. Тихонова, Л. В. Канторовича, С. Л. Соболева, А. Д. Александрова, профессоров В. Г. Болтянского, А. И. Маркушевича. Заинтересованность и участие выдающихся математиков в совершенствовании среднего математического образования — явление большой общественной значимости, приносящее огромную пользу математическому образованию, научно-техническому прогрессу в нашей стране.

Выступления математиков содержат различные, порой противоположные точки зрения по многим важнейшим аспектам среднего математического образования (о подхо-

де к построению, о системе понятий, строгости изложения и языке школьной математики), причем авторы, как правило, хорошо аргументируют свои предложения. Вопрос о том, какое из возможных решений заслуживает предпочтения, может быть решен не умозрительно, а в результате не только теоретического, но главным образом экспериментального исследования.

Изложенная ниже точка зрения автора, естественно, не единственно возможная, подчеркивает педагогическую сущность некоторых дискуссионных вопросов (перечисленных выше) и основана на следующем исходном положении: *школьное преподавание математики не может строго следовать каким-то крайним, теоретическим или прикладным, концепциям математики.* Оно должно выработать свой путь, включающий нужные элементы различных концепций и наилучшим образом отвечающий целям обучения, тем задачам, которые Коммунистическая партия Советского Союза ставит перед школой.

Рассмотрим четыре (I—IV) спорных вопроса преподавания математики в школе, каждый из которых подтверждает это исходное положение.

I. Подход к построению школьной математики. Рассмотрим два примера.

1. Последовательное применение теоретико-множественного подхода к построению школьного курса математики приводит к его значительному усложнению и дидактически ничем не оправдано. Это, бесспорно, подтверждено теоретически и экспериментально. Другая крайность — исключение из школьной математики всех теоретико-множественных понятий и обозначений — также дидактически не оправдана.

Здесь возникает частично уже исследованная педагогическая проблема: какие простейшие теоретико-множественные понятия и соответствующие обозначения оказываются полезными и эффективными в качестве вспомогательных (а не базисных) для усвоения математических знаний? В этом отражается специфика школьного обучения: оно может отвергать теоретико-множественный подход к построению школьной математики, но при этом эффективно использовать простейшие теоретико-множественные понятия и обозначения в качестве вспомогательных средств в обучении математике.

Чисто умозрительное утверждение о том, что простейшие элементы теоретико-множественного языка малодоступны школьникам и бесполезны в их обучении, противо-

речит уже существующему опыту их (разумного) применения. Особое значение эти простейшие понятия имеют для развития логических структур мышления детей (особенно маленьких). Старшие дошкольники, выполняя определенные практические действия над множествами конкретных предметов (игрушек или специального дидактического материала, например, «логических блоков»), образуя их объединения, пересечения, выделяя дополнение одного множества до другого и выражая предложениями свойства образованных множеств, постигают точный смысл логических связок, с помощью которых одни предложения конструируются из других. Введение этих понятий в дальнейшем обучении по существу помогает выявить то, что уже было давно сформировано и не требует затрат времени для специального изучения.

2. Векторное построение геометрии возможно и с математической точки зрения рационально. Это «царский путь в геометрии». Однако не все, что рационально с математической точки зрения, является таковым и с дидактической. Вряд ли на каком-нибудь этапе обучения, даже в старших классах общеобразовательной школы, дидактически оправдано векторное построение геометрии. Стремление к широкому использованию векторного аппарата в учебниках геометрии для IX, X классов привело к тому, что стереометрия оказалась излишне «векторизованной», превращенной в алгебру. Потерялась та естественная, возникшая из опыта геометрическая интуиция, которая всегда служила опорой в открытии геометрических истин и построении их доказательств. В большинстве своем доказательства в векторизованной стереометрии сводятся к формальным операциям над векторными выражениями, не использующим и не развивающим пространственные представления учащихся.

Другая крайность — исключение векторов из школьной геометрии — также дидактически не оправдана.

С педагогической точки зрения важно выяснить, где и как векторы, аппарат векторной алгебры окажутся эффективным средством доказательства геометрических теорем и решения задач, приводящим к значительному упрощению этих доказательств и решений по сравнению с традиционными.

II. Система понятий. Фундаментальную роль в построении школьной математики, отдельных ее разделов и тем играет система понятий.

К системе понятий школьной математики можно предъявить ряд педагогических требований. По-видимому, одно

из наиболее важных состоит в том, что эта система должна быть экономной. Это означает, что система должна включить минимум понятий, необходимых и достаточных для обеспечения, с одной стороны, логической стройности построения теории, с другой — кратчайшего пути к ее практическим приложениям. Иногда учитывается лишь первая цель, но не учитывается вторая. Это одна недопустимая крайность. Учет лишь второй цели, без учета первой, другая, такая же недопустимая крайность.

В системе понятий последовательность их введения не менее существенна, чем состав понятий. Порой дидактически нецелесообразная последовательность введения понятий усложняет применение теоретических знаний при решении задач. Например, в учебниках геометрии Киселева перпендикулярность прямых и плоскостей рассматривалась до введения понятия угла скрещивающихся прямых. Поэтому теорема о трех перпендикулярах формулировалась лишь для частного случая, когда прямая на плоскости проходит через основание наклонной. Нередко при применении этой теоремы к решению задач встречается ситуация, когда прямая на плоскости и наклонная к плоскости — скрещивающиеся прямые. Это несоответствие вызывало большие трудности у учащихся при решении стереометрических задач. Более раннее введение понятия угла двух скрещивающихся прямых обеспечило возможность рассмотрения теоремы о трех перпендикулярах в наиболее общем виде, что оказалось эффективным при решении задач.

Действенность, работоспособность системы понятий существенно зависит и от трактовки каждого понятия системы. Общеизвестно, что иногда один и тот же термин может обозначать различные понятия (введенные с помощью неэквивалентных определений). Например, термин «многоугольник» может обозначать фигуру, состоящую из простой замкнутой ломаной и ограниченной ею внутренней области или только из простой замкнутой ломаной. Утверждение о том, что какое-то из этих определений правильное, а другое неправильное, бессмысленно. С логической точки зрения они оба правильны, а с дидактической имеет смысл лишь вопрос, какое из этих определений целесообразно включать в систему понятий школьной геометрии. Анализ содержания школьной геометрии подтверждает, что первая трактовка заслуживает бесспорного предпочтения. Это понятие более естественно и психологически оправдано. Оно складывается постепенно, начиная с дошкольного возраста.

Педагогическая проблема — *какие понятия и в какой последовательности должны составлять логически и дидактически правомерную систему понятий школьной математики* — еще ожидает решения, удовлетворяющего современным требованиям.

В конкретно-методическом плане существует и окончательно не решена проблема: *какие математические понятия целесообразно вводить сразу с помощью точных определений, какие предварительно вводить на интуитивном уровне, а затем (и где именно) перевести в точные математические понятия, а какие оставить в школьной математике на уровне интуитивных представлений и понятий.*

Например, высказывается мнение о том, что такие понятия математического анализа, как предел и непрерывность, должны даваться в школе лишь как интуитивные. Предлагается также и связь между характером изменения функции и знаком производной, а также экстремальные значения рассматривать лишь наглядно с помощью графиков, не доказывая никакие теоремы, т. е. по существу предлагается весь раздел математического анализа в школе излагать на интуитивном уровне. Как видно, и здесь наблюдаются крайние, противоположные точки зрения, одинаково неприемлемые для школьного обучения.

Уровень изложения начал математического анализа в учебных пособиях под редакцией А. Н. Колмогорова слишком высок и недоступен учащимся IX, X классов общеобразовательной школы (этот уровень подходит лишь для классов с углубленным изучением математики). Здесь также важно найти тот логически и дидактически приемлемый, наиболее подходящий путь для школьного обучения.

III. О строгости изложения. О строгости изложения математики в школьном обучении можно говорить в двух аспектах.

Первый аспект *(глобальный)* касается построения раздела школьной математики, например алгебры, геометрии или начал математического анализа в целом.

Вообще построение считается строгим: а) если все понятия, кроме исходных, точно определяются с помощью исходных или ранее уже определенных; б) если все предложения, кроме исходных (аксиом), доказываются с использованием аксиом или ранее уже доказанных предложений (теорем). В этом случае идеал строгости изложения трудно достижим и имеет смысл говорить лишь о логически и дидактически приемлемом уровне строгости изложения для данного этапа обучения.

Как видно, понятие «уровень строгости изложения» носит прагматический характер и отражает связь между курсом школьной математики и тем, кому он адресован. Поэтому оценка строгости изложения учебного материала без учета того, для учащихся каких классов предназначено это изложение, бессмысленна.

Особенно спорным является вопрос о строгости изложения школьной геометрии, традиционно строящейся аксиоматически. В учебниках геометрии А. П. Киселева, методические достоинства которых общепризнаны, далеко не все предложения, не являющиеся аксиомами, доказывались, многие из них даже явно не формулировались.

Второй аспект строгости изложения *(локальный)* касается уровня строгости самих доказательств теорем, важнейших элементов изложения математической теории.

Доказательства, которые мы строим в школьном, содержательном, изложении геометрической теории, называемые также содержательными, и в которых используются неформализованные рассуждения, отвечают некоторому интуитивному, но не точному понятию доказательства. Понятие же формального доказательства строго (точно) определяется лишь в рамках некоторой формальной системы, в том числе в формальной системе для евклидовой геометрии, и это определение эффективно, т. е. можно указать разрешающий алгоритм, позволяющий в конечное число шагов ответить «да» или «нет» на вопрос, является ли данная конечная последовательность предложений (формул) доказательством. Таким образом, применительно к формальному доказательству выражение «строгое доказательство» не имеет смысла, если только не использовать его в качестве синонима для термина «доказательство». Содержательное же доказательство, как уже отмечалось,— интуитивное понятие, и поэтому не совсем ясно, что означает «строгое доказательство» и «нестрогое доказательство», и как установить, является ли некоторое доказательство строгим. Можно говорить лишь о различных уровнях строгости доказательства, отличающихся числом пропущенных шагов (логических пробелов), о наиболее высоком допустимом для данного этапа обучения уровне, с учетом возможностей учащихся.

Как видно, понятие уровня строгости доказательства, как и уровня строгости изложения в целом (в глобальном аспекте), носит прагматический характер, отражая отношение между доказательством и тем, кто его строит, усваивает. Если доказательство находится ниже некоторого граничного (снизу) уровня строгости, оно по существу перестает быть

доказательством, и только такое «доказательство», очевидно, можно назвать «нестрогим».

Вопрос об уровнях строгости доказательств, адекватных различным этапам обучения, есть важная психолого-педагогическая и логическая проблема. Дело в том, что даже небольшое повышение этого уровня (разумеется, без достижения какой-то абсолютной логической полноты и строгости, которая в содержательных доказательствах вообще невозможна) приводит к значительному усложнению доказательства, делая его непонятным для учащихся.

Школьный учебник геометрии должен разрабатываться с учетом психологического фактора. Логика не может опережать психологию. Нельзя ожидать результата процесса до того, как сформирован сам этот процесс. Доказывание — сложный процесс мышления, и он формируется постепенно, от простых структур к более сложным. Этому должно соответствовать и постепенное усложнение структуры доказательства, повышение уровня его строгости. Таковы закономерности мышления, обусловливающие и закономерности обучения. Нельзя естественный, психологически определенный порядок заменить обратным и думать, что, например, шестиклассники способны доказывать на том же (или на более высоком уровне строгости), что и девятиклассники.

Изложение доказательств в школьных учебниках и обучение доказательству представляют собой комплекс педагогических проблем, которые, несмотря на давность исследования, не получили еще решения, приемлемого для широкой практики обучения.

IV. О языке школьной математики. Школьная математика включает начальные фрагменты различных математических теорий (арифметики, алгебры, геометрии, математического анализа) в содержательном (неформальном) изложении. Поэтому язык школьной математики является языком этих начальных фрагментов перечисленных математических теорий. Вряд ли можно чем-нибудь оправдать придумывание специально для школьного обучения терминов и символов, не используемых в математике, всякого рода «школьных жаргонов», стремление к созданию «собственного» языка школьной математики, отличного от языка математики.

В данном случае важно решить, в какой мере использованный в школьном обучении математический язык должен быть формализован и символизирован, насколько дидактически целесообразно использование современного математического языка, включающего элементы теоретико-множе-

ственного и логического языков. В решении этой проблемы возможны две одинаково неприемлемые крайности: излишняя символизация и формализация языка школьной математики и недопущение в школьную математику современного математического языка.

Математика немыслима без соответствующего искусственного формализованного языка, получившего название математического именно потому, что он удовлетворяет потребностям математики, являясь средством не только выражения, но и преобразования информации. Это оперативный язык, на котором формулируются алгоритмы для решения различных классов задач. На языке десятичной системы счисления сформулированы алгоритмы арифметических действий, на алгебраическом языке мы решаем уравнения и неравенства по определенным алгоритмам, метод координат позволяет перевести геометрические задачи в алгебраические и решать их средствами алгебраического формализма, на формальном языке математического анализа мы дифференцируем и интегрируем функции различных классов по определенным алгоритмам, сформулированным на этом языке. Изучение математики на любом уровне предполагает ознакомление с искусственными формализованными языками.

Важная педагогическая проблема состоит в следующем: в какой мере и как изучать эти языки, чтобы не порождать формализм в знаниях, как сочетать синтаксический и семантический аспекты математических формализмов, чтобы достичь их правильного понимания и умения учащихся применять для описания реальных ситуаций и решения связанных с ними задач.

Язык математики развивается, и в этом отражается развитие самой математики. Математика XX в. пользуется языком, существенно отличающимся от языка математики XV в. Совершенно очевидно, что теорема, которая была известна в Древней Греции, должна формулироваться сейчас не на языке далеких предков, а на современном математическом языке.

Противоположные точки зрения по вопросу об использовании в школьном обучении элементов современного математического языка высказываются в статьях Л. В. Канторовича, С. Л. Соболева «Математика в современной школе» и А. С. Мищенко, Л. С. Понтрягина «О некоторых принципах преподавания математики в школе» (Математика в школе, 1982, № 2). Представляется бесспорной справедливость утверждения авторов первой из этих статей о том,

что «...в целом теоретико-множественные представления и обозначения применительно к конечным и другим конкретным множествам необходимы для понимания логического и математического описания реальных объектов и процессов. Скорее можно было бы поставить в упрек, что они пока недостаточно развернуты, не проиллюстрированы достаточными практическими применениями и задачами» (Математика в школе, 1979, № 4, с. 6).

Имеющийся по крайней мере десятилетний опыт подтверждает эффективность разумного использования небольшого числа теоретико-множественных и логических обозначений:

$$\in,\ \subset,\ \cup,\ \cap,\ \Rightarrow,\ \Leftrightarrow,\ \forall,\ \exists,$$

позволяющих кратко, ясно и точно записывать математические предложения, раскрывать их логическую структуру, что положительно влияет на усвоение математических знаний.

Вряд ли можно отдать предпочтение в обучении математике расплывчатому многозначному языку перед четким, ясным, однозначным математическим языком, выполняющим не только обучающие, но и воспитательные функции.

Разумеется, рассмотренные вопросы (I—IV) не исчерпывают список спорных вопросов преподавания математики в школе. Например, мы пока не затронули вопросы, касающиеся методов обучения, и некоторые другие.

3. ПСИХОЛОГО-ДИДАКТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

1. Три уровня теории обучения

1.1. Правомерно говорить о трех уровнях теории обучения, или о трех определенным образом связанных между собой теориях обучения: 1) о психологическом уровне, или о психологической теории обучения; 2) о дидактическом уровне, или об общей теории обучения (дидактике); 3) о конкретно-методическом уровне, или о методической теории обучения, например математике (о дидактике, или педагогике математики). По существу речь идет об иерархии трех теорий: вторая теория опирается на первую, а третья — на вторую, следовательно, опосредованно и на первую теорию.

1.2. Так как существуют различные психологические концепции обучения, то они могут служить базой для построения различных общих теорий обучения (дидактик), а

эти последние — для построения различных теорий обучения математике (ТОМ). На одной и той же психолого-дидактической основе можно построить различные ТОМ. Например, можно построить ТОМ, выдвигающую на первый план прикладные аспекты математики, и отличную от нее ТОМ, выдвигающую на первый план ее логику. Можно построить и такую ТОМ, которая правильно сочетает эти две важнейшие стороны математики, к чему мы и стремимся в соответствии с требованиями реформы школы.

Необходимо отметить, что полностью построенной или сколько-нибудь развитой ТОМ пока нет (ни в отечественной, ни в зарубежной научной литературе). Встречаются лишь описания определенных концепций, представляющих основу для построения такой теории.

Рассмотрим одну из возможных концепций в качестве основы ТОМ и покажем, как она может применяться в практике обучения математике.

2. Психологические основы

2.1. В основу ТОМ должна быть положена определенная базисная психологическая концепция обучения. В качестве таковой мы принимаем разработанный советскими психологами (С. Л. Рубинштейном, Н. А. Леонтьевым, П. Я. Гальпериным и др.) деятельностный подход, рассматривающий всякое обучение как обучение некоторой деятельности (в конечном итоге мыслительной, так как всякая практическая деятельность является внешним отражением некоторой мыслительной деятельности: «сначала подумай, потом делай». Значит, чтобы научить что-то делать, надо прежде всего научить соответствующим образом думать, мыслить).

Исходя из этой общей психологической концепции обучения деятельности, в результате ее конкретизации с учетом специфики математики мы получаем концепцию обучения математике как обучения определенного рода мыслительной деятельности, познавательной деятельности в области математики.

2.2. Для обучения определенному роду деятельности важно прежде всего выяснить состав этой деятельности, т. е. необходимо знать, чему мы хотим учить.

Проведенный психологами анализ познавательной деятельности выявляет три составных компонента этой деятельности: 1) набор общих логических приемов мышления; 2) набор специфических для определенной области знаний

(в нашем случае для математики) приемов мышления; 3) систему знаний.

Необходимо подчеркнуть, что система знаний играет двоякую роль в процессе обучения, являясь и результатом и важным компонентом познавательной деятельности. Это объясняется тем, что формирование и развитие системы знаний протекает постепенно в процессе учебной (познавательной) деятельности с помощью общелогических и специфических приемов мышления на базе уже сформированной (до этого) части системы знаний. На «голом месте», т. е. без наличия каких-нибудь знаний, никакая познавательная деятельность в данной области знаний невозможна.

Если на каком-то этапе обучения познавательная деятельность определяется тройкой (L, M, S), где L — набор общелогических приемов мышления; M — набор специфических для математики приемов мышления (приемов «математической деятельности»); S — система уже имеющихся у учащихся математических знаний, то посредством этой познавательной деятельности через некоторое время приходим к новой тройке (L, M, S_1), где $S \subset S_1$, т. е. происходит постепенное расширение системы знаний.

В процессе обучения образуется цепочка

$$(L, M, S) \longrightarrow (L, M, S_1) \longrightarrow (L, M, S_2) \longrightarrow \ldots, \qquad (1)$$

где $S \subset S_1 \subset S_2 \subset \ldots$

На различных этапах обучения, в различных учебных ситуациях, определяемых уровнем знаний учащихся, целями и содержанием обучения, могут, разумеется, использоваться различные элементы L и M, а также некоторые из S.

Обучение готовым знаниям порождает цепочку

$$S \longrightarrow S_1 \longrightarrow S_2 \longrightarrow \ldots \qquad (2)$$

и не обеспечивает достаточного развития умственной деятельности, состоящей из логических (из L) и специфических для математики (из M) приемов мышления, так как полученные извне, а не в результате собственной познавательной деятельности, знания заучиваются и воспроизводятся и в достаточной мере не влияют на развитие этой деятельности.

Однако процесс обучения математике не может строиться целиком ни по схеме (1), т. е. как обучение только познавательной деятельности, ни по схеме (2), т. е. как обучение только готовым знаниям.

В самом общем виде концепцию, положенную нами

в основу ТОМ, можно кратко сформулировать в виде следующего исходного положения этой теории: *обучение математике есть дидактически целесообразное (обоснованное) сочетание обучения математическим знаниям и познавательной деятельности по приобретению этих знаний, т. е. специфической для математики познавательной деятельности*, которую для краткости, хотя и несколько условно, назовем математической.

2.3. На первый взгляд сама постановка проблемы обучения математической деятельности может казаться неправомерной. Способен ли ученик, допустим, младших классов школы к математической деятельности?

Очевидно, что к математической деятельности, протекающей на высоком логическом уровне, не способен ни ученик младшего класса, ни ученик старшего класса. Но к какой-то математической деятельности, адекватной его уровню мышления (или даже несколько выше этого уровня), способен и первоклассник. Все зависит от того, что мы понимаем под «математической деятельностью».

Американский психолог Дж. Брунер в книге «Процесс обучения», рассматривая проблемы психологии обучения (роль структуры знаний в обучении, готовность к обучению и природу интуиции), говорит, что решение этих проблем вытекает из одного центрального положения: «Умственная деятельность везде является той же самой, на переднем ли фронте науки или в третьем классе школы» (М., 1962, с. 17).

Это положение, разумеется, не надо понимать буквально. Умственная деятельность третьеклассника и умственная деятельность ученого математика, конечно, не тождественны. По крайней мере факторы, стимулирующие открытия, различны. Но когда ученик в специально созданной педагогической ситуации что-то открывает, он рассуждает как первооткрыватель. Когда первоклассник (или дошкольник) образует пары элементов из двух множеств и приходит к выводу, что в одном множестве больше предметов, чем в другом, он уже осуществляет некоторую, хотя и весьма примитивную, математическую деятельность.

Когда в дальнейшем ученик переходит от операций над множествами конкретных предметов к операциям над соответствующими кардинальными числами (числами элементов этих множеств), отвлекаясь при этом от природы предметов, то это уже математическая деятельность более высокого уровня. Открывая законы операций над числами, отвлекаясь при этом от конкретных чисел, заменяя их переменными для чисел, ученик осуществляет математическую

деятельность еще более высокого уровня. Далее, когда ученик (с помощью учителя) научится из одних законов операций выводить другие, он переходит на еще более высокий уровень математической деятельности. И этот уровень тоже не является пределом для учащихся.

Обучение математике может и должно строиться так, чтобы ученик последовательно переходил от одного уровня математической деятельности к следующему, более высокому.

Некоторые считают, что для ученика «открывать» новое в математике намного труднее, чем заучивать готовое. С этим мнением нельзя согласиться. Верно, что для педагога труднее учить открывать, чем учить заучивать. Школьнику же при соответствующей постановке обучения легче действовать как математику, открывать самому истину, чем заучивать готовую систему предложений и доказательств без понимания их происхождения, значения и взаимной связи. Но ведь именно так происходит часто в традиционном преподавании, особенно в геометрии, когда на головы учащихся «обрушивается» система аксиом и теорем. Если же преподавание нацелено не на заучивание уже построенной системы, а на организацию рассуждений учащихся с тем, чтобы они были в состоянии заново открыть те факты, которые составляют содержание предложений системы, а затем и логически упорядочить их в систему, это приводит к более быстрому развитию мышления учащихся и к подлинному пониманию изучаемого материала.

Руководитель комиссии по реформе математического образования при Иллинойском университете (США) М. Биберман, описывая подготавливаемую этой комиссией реформу, исходит из того, что ученик достигает понимания математики, если он принимает активное участие в развитии математических идей и процедур. Разрабатываемый этой комиссией проект внедряет в обучение метод «открытий», противопоставляемый методу «доказательства готовых предложений». Однако метод открытий требует слишком много времени, чтобы донести до учащихся все то, что они должны усвоить в математике. Поэтому возникает необходимость исследовать вопрос о целесообразном сочетании двух методов.

Активное обучение математике, понимаемое как обучение математической деятельности, не сводится целиком к методу открытий и не предполагает, что учащиеся должны открывать все то, что изучают в математике. Когда ученик в процессе изучения начал математической теории уже до-

статочно много «открыл» самостоятельно, в дальнейшем новые теоремы этой теории уже не являются для него столь неожиданными.

Постепенное формирование и развитие у учащихся тех логических структур, которые лежат в основе математической деятельности,— важнейшее средство обучения математике.

Проблема так называемой «активизации» учащихся в процессе обучения, в последнее время обратившая на себя внимание многих педагогов-математиков, рассматривается обычно в общем плане, т. е. как обеспечение активности в широком смысле.

Такое обучение математике, обеспечивающее лишь активность в широком смысле без учета специфических особенностей математического мышления, мы будем называть *квазиактивным обучением.*

Обучение же, обеспечивающее активность в узком, специфическом для математики смысле, т. е. обучение математической деятельности, будем называть *активным обучением* математике. Для осуществления активного обучения прежде всего необходимо выяснить состав, структуру математической деятельности, чтобы разработать методику обучения этой деятельности.

Чтобы определить, сможет ли ученик осуществить некоторую математическую деятельность и в чем должна состоять обучающая деятельность учителя, надо знать уровень мышления ученика и уровень математической деятельности, которой мы хотим его обучать. Сопоставление этих уровней поможет определить, какая помощь учителя нужна, чтобы поднять уровень мыслительной деятельности ученика до уровня предлагаемой математической деятельности, или же покажет, что различие уровней слишком велико и на данном этапе обучения должен быть снижен уровень предлагаемой математической деятельности.

3. Модель математической (учебной) деятельности

3.1. Для построения ТОМ необходимо прежде всего принять определенную модель учебной математической деятельности, отражающую, с одной стороны, основные стороны реальной математической деятельности, с другой — предоставляющую хорошие возможности для приспособления к школьному обучению.

Большую помощь педагогике математики оказали бы творчески работающие математики, если бы они раскрыва-

ли «секреты» своего математического творчества. К сожалению, мы знаем мало математиков, которые (как Эйлер) занимались бы анализом своей творческой деятельности. Вообще говоря, это очень сложно, и математику, очевидно, легче достигнуть нового, выдающегося результата, чем рассказать о том, как он его достиг.

У нас нет достоверной информации о том, как протекает математическая деятельность того или иного математика. Об этом можно лишь догадываться.

Анализ математической деятельности проводится в основном по ее результатам путем восстановления «правдоподобного» процесса мыслительной деятельности, ведущего к открытию и обоснованию данного результата. Такому анализу на ряде примеров посвящена первая часть книги Пойа «Математика и правдоподобные рассуждения» (М., 1957).

Обычно говорят, что математика — дедуктивная наука, а математическое мышление отождествляют с дедуктивным (доказательным) мышлением. Однако это лишь одна из сторон (один из аспектов) математики и математического мышления.

Законченная математика действительно представляет собой стройную дедуктивную теорию. Но математические знания аналогичны любым другим знаниям, находящимся в процессе развития: мы должны открыть теорему прежде, чем ее докажем, мы должны догадаться об идее доказательства прежде, чем осуществим это доказательство. Поэтому если мы хотим, чтобы обучение математике отражало в какой-то мере процесс математического творчества, то должны учить не только «доказывать», но и «догадываться».

Математик не разрабатывает абстрактную дедуктивную теорию из ничего. Прежде всего замечают, что некоторые конкретные системы (механические, электрические, биологические и т. д.,), какими бы различными они ни казались, имеют определенное сходство в структуре, в свойствах отношений между объектами. Затем начинают абстрагировать и изучать структуру связей в множестве объектов, лишенном частных характеристик различных исходных конкретных систем. Так рождается абстрактная теория, систематизирующая множество конкретных систем, которые становятся ее моделями.

Логически модель появляется после теории, психологически она предшествует абстрактной теории, являясь стимулом для построения последней (и это особенно важно в обучении).

Различные неправильные толкования предмета математики объясняются, в частности, тем, что математическая теория рассматривается ограниченно, в одном лишь законченном аспекте, логическое построение отрывается как от реальной основы, на которой оно выросло, так и от приложений, ради которых осуществлено.

3.2. В литературе встречаются различные модели математической деятельности, содержащие три или четыре основных ее аспекта. Мы исходим из модели, выделяющей три основных аспекта математической деятельности: 1) математическое описание конкретных ситуаций, или деятельность по математизации эмпирического материала (МЭМ); 2) логическая организация математического материала (ЛОММ), полученного в результате первого аспекта деятельности, или исследование класса моделей, к которому принадлежит полученная в результате первого аспекта деятельности модель конкретной ситуации, или построение теории (маленькой, «локальной» или большой, «глобальной»); 3) применение математической теории (ПМТ), полученной в результате второго аспекта деятельности.

Эта модель, как и всякая другая, разумеется, отражает лишь упрощенно, схематично сложный моделируемый объект — реальную математическую деятельность. Однако из большого разнообразия аспектов этой деятельности она выделяет действительно основные, к тому же, по-видимому, наиболее важные с дидактической точки зрения.

Три стороны единого процесса познания отражаются в трех взаимосвязанных аспектах математической деятельности (МЭМ, ЛОММ, ПМТ). Эти аспекты деятельности представляют собой специфические для математики приемы мышления (M), которые используют в определенных сочетаниях общелогические приемы (L).

Наиболее частое применение тех или иных логических приемов в различных аспектах математической деятельности (отмечено знаком «плюс») представлено в табл. 3.1.

Эмпирический материал (ЭМ) — это окружающие нас реальные системы вещей или же системы объектов из другой научной области (физики, химии, биологии, экономики и т. д.), подлежащие математическому описанию, или специально приготовленные для целей обучения предметы, чертежи (дидактический материал), или, наконец, математический материал (система математических объектов), когда он подвергается дальнейшей математической систематизации, обобщению и абстрагированию (в математике используется многоступенчатая абстракция) с целью создания бо-

Таблица 3.1

Набор логических приемов мышления (*L*)	Аспекты математической деятельности (*M*)		
	МЭМ	ЛОММ	ПМТ
Индукция	+		+
Дедукция		+	+
Анализ	+	+	+
Синтез	+	+	+
Сравнение	+		+
Сопоставление	+		+
Классификация	+	+	
Обобщение	+	+	
Абстрагирование	+	+	
Конкретизация			+

лее общих понятий, построения более общих теорий.

Особенность применения логических приемов в обучении математике, согласно рассматриваемой концепции, состоит в том, что они используются не изолированно от специфических приемов математической деятельности, а в рамках различных аспектов этой деятельности.

3.3. Обучение математической деятельности есть *активное* обучение математике. Это означает, что мы должны обучать учащихся не заучивать готовый материал, а *открывать математические истины* (открывать для себя то, что уже открыто в науке), *логически организовывать* добытый опытным путем математический материал (хотя он уже организован в науке) и, наконец, *применять теорию* в различных конкретных ситуациях.

Важная педагогическая проблема состоит в определении целесообразного соотношения трех стадий математической деятельности на различных этапах обучения.

Первая и третья стадии математической деятельности (математизация ситуаций и приложения теории) не менее важны, чем вторая (логическое построение теории), как в научном исследовании, так и особенно в обучении. Преподавание, которое ведется чисто дедуктивно, т. е. учитывает только одну из этих стадий, по выражению известного французского математика Г. Шоке, является бесплодным и калечащим. Это необходимые стадии, и на их уровне образовываются новые структуры и переходят от одного уровня мышления к другому.

В каждой конкретной области математики (элементарная геометрия, алгебра, анализ и т. д.) можно мыслить на различных «уровнях». Уровень мышления в данной обла-

сти — это сложное понятие, включающее определенный уровень общности, абстракции и строгости обоснования изучаемого материала, определенные логические структуры. Каждому уровню мышления в данной области, допустим в геометрии, соответствует свой язык, состоящий из специальных, т. е. геометрических, и логических терминов. При переходе от одного уровня к другому (высшему) этот язык расширяется; поэтому люди, рассуждающие об одном и том же, но на различных уровнях, не могут понять друг друга, так как говорят по существу на различных языках (такая ситуация наблюдается в практике преподавания, когда обучающий не учитывает фактический уровень мышления обучаемого).

Развитие, ведущее к более высокому уровню, протекает в основном как процесс обучения. Поэтому необходимо, чтобы преподавание было ориентировано на ускорение этого развития. Метод преподавания может ускорить переход от одного уровня к следующему, но не может осуществить переход от одного уровня к другому с пропуском промежуточного (в таком случае учитель и ученик мыслили бы на различных уровнях). Очевидно, что метод преподавания может и задерживать переход к более высокому уровню мышления в том смысле, что применяемые на этом уровне способы мышления останутся недоступными учащимся.

В области геометрии можно выделить, следуя П.-Х. ван Хиле, пять уровней мышления.

Первый, самый низкий (ван Хиле называет его нулевым) уровень, характеризуется тем, что геометрические фигуры рассматриваются как целые и различаются только по своей форме. Если показать первокласснику, например, ромб, прямоугольник, квадрат, параллелограмм и сообщить ему соответствующие названия, то после нескольких повторений он сможет безошибочно распознавать эти фигуры исключительно по их форме (причем еще не анализированной), не видя, разумеется, в ромбе параллелограмм и в квадрате прямоугольник. На этом уровне ромб противопоставляется параллелограмму, квадрат — прямоугольнику.

На следующем, втором, уровне проводится анализ воспринимаемых форм, в результате которого выявляются их свойства. На этом уровне геометрические фигуры выступают как носители своих свойств и по ним распознаются. Но на данном уровне свойства фигур логически еще не упорядочены, они устанавливаются исключительно экспериментальным путем. Сами фигуры также не упорядочены, так как они только описываются, но не определяются. Этот уровень

мышления в области геометрии еще не включает структуру логического следования.

Очевидно, что описанные два уровня доступны учащимся начальных классов. Это должно учитываться при составлении программ и разработке методики преподавания начальной геометрии.

На третьем уровне осуществляется логическое упорядочение свойств фигур и самих фигур. Одно или несколько свойств принимаются за определяющие фигуру, другие устанавливаются логическим путем. Геометрические фигуры выступают уже в определенной логической связи, выявляемой с помощью определений. Но собственное значение дедукции в целом еще не постигается учащимися на этом уровне (доступном для учащихся 11—14 лет) ввиду того, что они еще не в состоянии понять дедуктивную систему в целом. Здесь учащимся может быть разъяснено лишь значение дедукции «локально», т. е. в рамках одной небольшой темы. В такой «маленькой теории» можно показать, что дедукция позволяет нам сократить опыт, обнаруживая экспериментально одни свойства, другие же могут быть выведены из них путем рассуждений.

На следующем, четвертом, уровне постигается значение дедукции «в целом», т. е. от понимания ее «в малом» переходят к пониманию ее значения как способа построения и развития всей геометрической теории. Этому переходу способствует разъяснение сущности аксиом, определений, теорем, логической структуры доказательств, логической связи понятий и предложений. Этот уровень вполне доступен учащимся старших классов (15—17 лет). Можно сказать, что на этом уровне осуществляется «содержательная» аксиоматизация теории, т. е. аксиоматизация теории в определенной конкретной ее интерпретации.

На самом высоком, пятом, уровне отвлекаются от конкретной природы объектов и конкретного смысла отношений между ними, т. е. развивают теорию вне всякой ее конкретной интерпретации. На этом уровне геометрическая теория строится как абстрактная дедуктивная система. Такое построение не может осуществляться ни на одном этапе обучения геометрии в средней школе.

В области алгебры (включая арифметику) также можно выявить различные уровни мышления.

На самом низком, первом, уровне число неотделимо от множества конкретных предметов, которое оно характеризует, а операции проводятся непосредственно над множествами предметов.

На следующем, в т о р о м, уровне числа (натуральные, целые, рациональные) отделены от тех конкретных объектов, которые они характеризуют. На этом уровне оперируют числами, записанными в определенной (десятичной) системе счисления, а свойства операций устанавливаются индуктивно.

На следующем, т р е т ь е м, уровне осуществляется переход от конкретных чисел, выражаемых цифрами, к абстрактным буквенным выражениям, обозначающим конкретные числа лишь при определенном истолковании букв. На этом же уровне осуществляется «локальное» логическое упорядочение свойств.

На ч е т в е р т о м уровне выясняется возможность дедуктивного построения всей алгебры в заданной конкретной интерпретации, т. е. когда буквы, обозначающие объекты исчисления, применяются в качестве имен и переменных для чисел из некоторого заданного множества (натуральных, целых, рациональных или вещественных чисел), а операции имеют обычный смысл.

Наконец, на п я т о м уровне отвлекаются от конкретной природы объектов исчисления, от конкретного смысла операций и строят алгебру как абстрактную дедуктивную систему вне всякой интерпретации. На этом уровне осуществляется переход от известных конкретных моделей к абстрактной теории и от нее к другим ее моделям, постигается возможность существования различных алгебр, отличающихся формальными свойствами операций.

Необходимо отметить, что на каждом этапе обучения можно выявить основной уровень, на котором ведется преподавание, а также элементы соседних уровней. Это объясняется тем, что переход от одного уровня к следующему происходит не скачкообразно, а постепенно, т. е. элементы более высокого уровня появляются до того, как осуществлен переход к этому уровню, до того, как он становится основным. И после этого перехода мы часто возвращаемся к более низкому уровню с целью обеспечения лучшего понимания.

Нетрудно заметить, что обычно преподавание геометрии на всех этапах обучения ведется примерно на третьем уровне, с элементами первого и второго в VI—VII классах и некоторыми элементами четвертого уровня в старших классах. Четвертый уровень полностью не достигается. Оканчивающие среднюю школу не знают, в чем сущность дедуктивного построения геометрии, не понимают роли аксиом и определений в этом построении. Мы опросили около 200 учащихся десятых классов. На вопрос, что они понимают под

аксиомой, все опрашиваемые ответили примерно так: «Аксиома — истина (или «предложение», а некоторые говорили даже «теорема»), не требующая доказательства». На вопрос, почему аксиома не требует доказательства, учащиеся ответили: «Потому, что она очевидна». Когда же мы назвали целый ряд теорем, не менее очевидных, чем известные им аксиомы, но которые, однако, «требуют» доказательства, учащиеся ничего не смогли ответить.

В отличие от преподавания геометрии, которое ведется, хотя и не полностью, на четвертом уровне, традиционное преподавание алгебры не подымается выше третьего уровня, причем в части логического упорядочения свойств операций и этот уровень достигается не полностью.

Основным же дефектом преподавания является, как мы уже говорили, недостаточное применение активного (в узком смысле) метода, предназначенного для обучения всем аспектам математической деятельности.

4. Общедидактические основы

4.1. ТОМ, являясь продолжением и конкретизацией общей теории обучения (дидактики), должна опираться на определенную общедидактическую систему. В качестве общедидактической основы ТОМ мы принимаем дидактическую систему проблемного обучения, согласно которой процесс обучения строится как последовательность проблемных ситуаций.

Практически проблемное обучение математике, как правило, проявляется в виде обучения «через задачи» (хотя не всякое такое обучение является проблемным).

Обучение математике через задачи — давно известная и широко обсуждаемая в педагогико-математической литературе проблема. Однако до сих пор она не получила удовлетворительного решения, которое предполагает разработку системы задач, соответствующей современной программе и приспособленной к обучению математической деятельности. Это означает, что задачи должны служить и мотивом для дальнейшего развития теории (введения новых понятий, открытия и доказательства новых свойств изучаемых объектов) и возможностью для ее эффективного применения.

В установившейся практике пользуются обучением через задачи лишь при изучении отдельных вопросов. Примером может служить развитие понятия числа в школьном курсе. С помощью специально подобранных задач обнаруживается недостаточность известного на данном этапе обучения

множества чисел, а следовательно, и необходимость его расширения, введения новых чисел. После введения новых чисел и изучения структуры расширенного множества чисел мы возвращаемся к исходным (и другим) задачам, которые уже разрешимы в этом множестве.

Как видно, такое обучение ведется по схеме «задачи ⟶ ⟶теория⟶задачи».

Обучение математической деятельности предполагает широкое применение этой схемы (не только в учении о числе). Необходимо исходить из проблемных ситуаций, возникающих во внематематической предметной области (в области естественных наук, техники, экономики или вообще в какой-нибудь области практической деятельности), и формулировки соответствующих задач. Затем ставится цель решить эти задачи математическими средствами.

Первый шаг к достижению этой цели состоит в определенной обработке (подготовке) задачи (разумеется, после ее тщательного изучения), в результате которой должна получиться математическая модель фигурирующих в ней связей — математическая задача. Возможно, что уже при попытке перевода исходной задачи в математическую или же после осуществления этого перевода, при попытке ее решить окажутся недостаточными имеющиеся в нашем распоряжении математические средства. Эти случаи всегда влияли на историю самой математики (так как стимулировали ее развитие) и так же воздействовали на обучение математике.

4.2. Конкретизация общедидактической системы проблемного обучения и ее сочетание с обучением математической деятельности позволяет выявить три основных типа проблемных ситуаций. Они специфичны для этого обучения, отличаются учебными целями, природой известного и неизвестного, рассогласованность которых порождает проблемную ситуацию, и результатами снятия (разрешения) этой ситуации.

Разумеется, в обучении математике могут встречаться и другие типы проблемных ситуаций. Однако основными являются три типа, характеристики которых даны в табл. 3.2.

Следует подчеркнуть, что обучение математической деятельности в сочетании с проблемным обучением не может рассматриваться как некая универсальная методика, применимая во всем процессе обучения математике, на каждом уроке.

4. 3. Сочетание общедидактической системы проблемного обучения с конкретно-методической системой обучения ма-

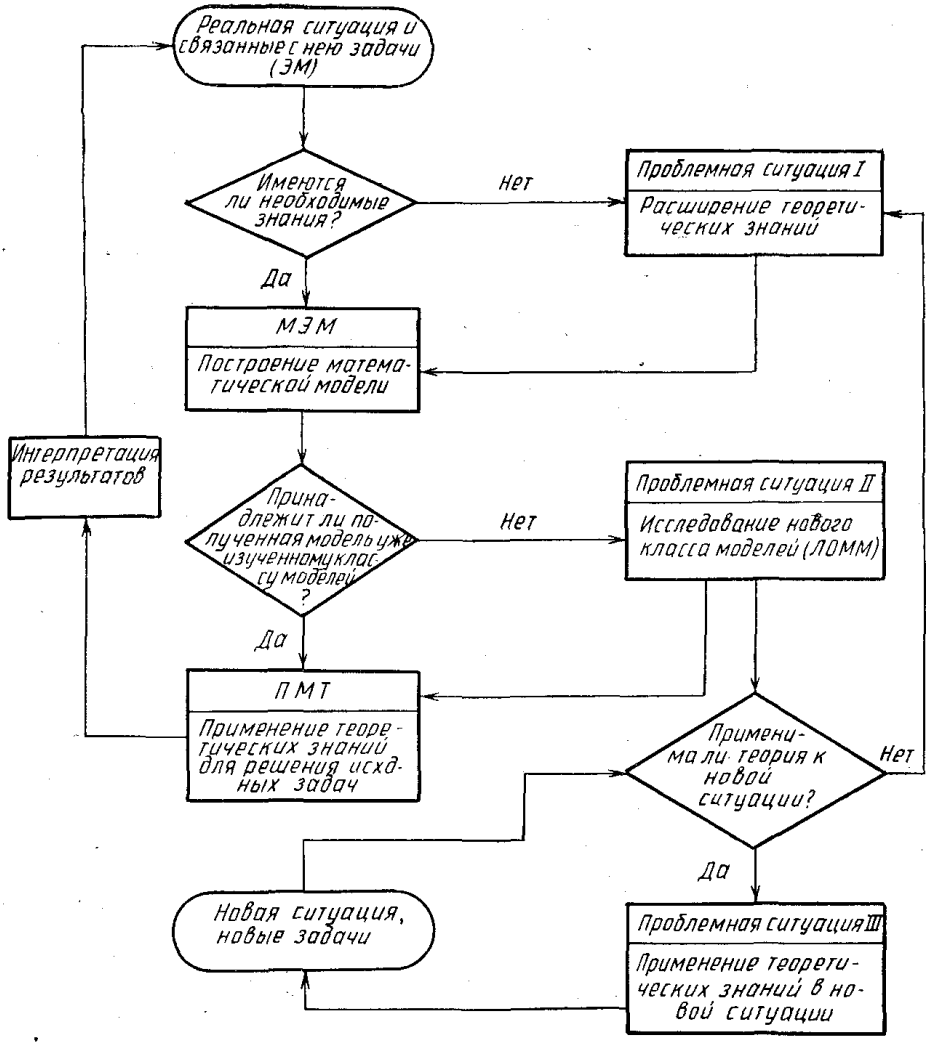


Рис. 3

тематической деятельности можно представить в виде общей схемы проблемного обучения математике (рис. 3).

В некоторых темах школьного курса математики приведенная схема частично осуществляется на практике. Например, решая конкретную задачу, приводящую к квадратному уравнению, мы применяем алгоритм решения подобных уравнений и интерпретируем результат на языке той конкретной ситуации, в которой возникла задача. Если же мы еще не знаем этот алгоритм, то возникает необходимость в исследовании нового класса моделей ($ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$)

Таблица 3.2

Основные аспекты математической деятельности	Основные типы проблемных ситуаций			
	Цель	Известное	Неизвестное	Результаты
МЭМ	Введение новых понятий, расширение теоретических знаний	ЭМ, подлежащий математическому описанию	Математический язык, аппарат, необходимый для описания ЭМ	Новые математические знания
ЛОММ	Систематизация знаний	Математический материал, модель ЭМ	Способ логической организации математического материала, исследование модели	Система математических знаний
ПМТ	Применение знаний в новых ситуациях	ЭМ и МТ (математическая теория)	Способ применения МТ к новому ЭМ, в новых ситуациях	Перенос математических знаний

с целью построения соответствующего алгоритма (проблемная ситуация II).

Конкретная задача породила проблемную ситуацию, послужила стимулом для расширения теоретических знаний и в конечном итоге для разрешения этой проблемной ситуации. Данная концепция предусматривает более широкое применение приведенной схемы обучения (см. рис. 3), хотя и не относит ее к универсальной (применимой к каждой теме школьного курса математики).

4. ПСИХОЛОГО-ДИДАКТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ. ДИДАКТИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ

1. Система дидактических принципов

1.1. Дидактические принципы, или принципы обучения,— исходные положения теории обучения. Они определяются целями обучения и воспитания, потребностями общественного развития, особенностями учебной деятельности учащихся, выявляемыми на основе данных психологии и социологии. В свою очередь принципы дидактики определяют

методы обучения. Последние строятся так, чтобы обеспечить наилучшим образом реализацию принципов дидактики.

Дидактические принципы взаимно связаны и образуют систему принципов (разумеется, в различных педагогических изданиях встречаются различные варианты эквивалентных систем).

1.2. Мы примем систему, состоящую из шести принципов: научность в обучении, сознательность усвоения, активность учащихся, наглядность обучения, прочность знаний, индивидуальный подход, и рассмотрим вопрос о реализации каждого из этих принципов, а также связь между ними в обучении математике.

Наша цель — выявить недостатки традиционной методики в реализации дидактических принципов и определить направление усовершенствования методов обучения с целью достижения лучшего их применения в учебном процессе.

2. Научность в обучении

2.1. Принцип научности состоит в том, что образовательный материал, составляющий содержание школьного обучения, должен (в возможной мере) соответствовать уровню современной науки, преподноситься учащимся в определенной (дидактической) *системе,* отражающей научную систему, в определенной *последовательности,* сохраняющей связи понятий, тем, разделов внутри каждого предмета, а также межпредметные связи.

Иногда в педагогической литературе рассматриваемый принцип именуется принципом «научности, систематичности и последовательности» в обучении. Мы его называем кратко принципом научности в обучении, так как научность включает и систематичность, и последовательность.

Разумеется, механический перенос системы науки в школьное обучение вообще невозможен. Как мы уже отметили, научная система подвергается специальной (дидактической) обработке, в результате которой получается дидактическая система — учебный предмет.

Дидактическая система характеризуется следующими особенностями: а) отражает (но не воспроизводит в точности) систему науки, сохраняя по мере возможности в общих чертах присущую ей логику и систему знаний; б) в ней последующее опирается на предыдущее; в) вся система знаний по предмету, порядок расположения материала по годам обучения соответствует психологическим особенностям и возможностям учащихся и способствует их дальнейшему

более быстрому развитию; г) раскрывает внутреннюю связь между научными понятиями, закономерностями, а также связь данного предмета с другими предметами.

Последовательное расположение материала является необходимым условием систематичности. Каждая система характеризуется определенной последовательностью расположения материала, и сравнительный анализ различных систем изложения одного и того же материала сводится к сравнению соответствующих последовательностей расположения материала и идей, лежащих в их основе.

2.2. Предпринятая в 60—70-х гг. реформа математического образования по существу была обусловлена тем, что установившаяся традиционная дидактическая система математики не отражала научной системы современной математики. Однако, как мы уже указывали, приведение дидактической системы школьной математики (учебный предмет) в соответствие с научной системой современной математики столкнулось с рядом серьезных затруднений.

Это, однако, не означает, что проблема неразрешима и единственный выход — возврат к старой, «традиционной» системе. Необходима дальнейшая разработка дидактической системы школьной математики, в определенной мере отражающей научную систему современной математики.

3. Сознательность усвоения

3.1. Сознательность усвоения понимается как такое овладение учащимися знаниями, которое включает глубокое понимание усвоенного и умение применять его в новых конкретных ситуациях.

Трудности, связанные с реализацией принципа сознательности, обусловлены отчасти тем, что до сих пор недостаточно изучен механизм понимания. Мы по существу не знаем точно, что означает «понимать». Оставаясь в этой области на интуитивном уровне, мы все же можем уверждать, что если ученик «понял» такой-то материал, то он должен уметь отвечать на такие-то вопросы, решать такие-то задачи. Отсюда легко выяснить, что такое непонимание: если ученик не справляется с этими вопросами и задачами, он не понял данный материал. Но если он справляется с ними, то можно лишь с некоторой вероятностью утверждать, что он понял. Заключение о том, что ученик понял (а не только знает) материал, является лишь правдоподобным, но не достоверным.

В процессе обучения мы должны постоянно получать ин-

формацию о качестве усвоения учащимися изучаемого материала. Чтобы выяснить, заучен ли только материал или же знания учащегося основаны на понимании этого материала, нужны *педагогически целесообразные* подбор и постановка вопросов, упражнений, задач. Проблема постановки вопросов — сложная и далеко еще не решенная педагогическая проблема. Здесь уточним лишь несколько наше понимание «педагогически целесообразной постановки» вопросов.

Будем считать, что вопрос «педагогически целесообразно» поставлен, если он вызывает активную мыслительную деятельность учащегося и не допускает ответа, копирующего учебник. Например, вопрос: «Сколько окружностей можно провести через три точки, не лежащие на одной прямой?» (на который учащийся без всякого затруднения отвечает «Одну») поставлен педагогически нецелесообразно. Если же задать вопрос: «Сколько окружностей можно провести через три точки?», готового ответа ученик не найдет в учебнике. Ему нужно самому комбинировать, исследовать возможное расположение трех точек, рассмотреть случай, когда «точки лежат на одной прямой» и когда «точки не лежат на одной прямой», и в каждом из этих случаев сделать соответствующее заключение. Этот вопрос поставлен педагогически целесообразно в силу оптимального количества «энтропии» (неопределенности). Чем больше энтропия (неопределенность) вопроса, тем больше информации должен содержать ответ на такой вопрос.

Поэтому, если вопрос содержит слишком большую энтропию, то он не вызывает активной мыслительной деятельности, так как невозможность сразу дать большое количество информации ставит ученика «в тупик», и поиски ответа бесполезны. Вопросы же с малой энтропией также не способствуют активной мыслительной деятельности учащихся, как, например, первый из приведенных выше.

Таким образом, в процессе обучения вопросы должны ставиться так, чтобы количество требуемой в них информации было оптимальным (не слишком малым и не слишком большим). Это необходимо учитывать авторам учебников, сборников упражнений и задач, учителям при подготовке к каждому уроку.

3.2. Сознательное усвоение знаний принципиально исключает догматическое преподавание, результатом которого являются «формальные знания». Формализм в знаниях является противоположностью сознательности усвоения и чаще всего встречается в обучении математике. Это объясня-

Таблица 5.1

<table>
<tr><th>Математика</th><th>Формализм</th><th>Отрыв теории от практики</th></tr>
<tr><td>III ступень: ЯЗЫК
(совокупность средств выражения, используемых математикой в качестве орудия исследования и логического упорядочения содержательных понятий и отношений)</td><td rowspan="3">Нарушение правильной связи между II и III ступенями</td><td></td></tr>
<tr><td>II ступень: ПРЕДМЕТ
(содержательные математические понятия и закономерности, абстрагированные от отношений и форм материальной действительности)</td><td rowspan="2">Нарушение правильной связи между I и II ступенями</td></tr>
<tr><td>I ступень: ИСТОЧНИК
(объективная материальная действительность)</td></tr>
</table>

ется спецификой математических методов, в частности широким использованием формализованного языка, что создает возможность отрывать в обучении форму, язык от выраженного в нем содержания вследствие неправильного, одностороннего изучения этого языка. Такой отрыв и является источником формализма в знаниях.

Сущность формализма в математических знаниях уточнил А. Я. Хинчин, отметив два традиционных недостатка в обучении математике: а) формализм; б) отрыв теории от практики (Хинчин А. Я. М., 1963). Он объяснил их сущность как нарушения связи между определенными «ступенями» математики. Отрыв теории от практики означает отрыв математического исследования от его живого источника — материальной действительности. Явление формализма есть отрыв орудия исследования (совокупности используемых математикой средств выражения) от предмета исследования, от содержательных математических понятий. Приведенная схема (табл. 5. 1) иллюстрирует высказанные А. Я. Хинчиным идеи.

Формальные знания характеризуются тем, что заучивается и запоминается внешнее, формальное, символическое выражение содержательного математического факта, сам

же этот факт либо вовсе отсутствует в сознании, либо присутствует вне всякой связи со своим формальным выражением, никак не ассоциируется с ним в представлении учащегося.

Приведем несколько примеров формальных знаний:

1) учащиеся, легко решившие систему уравнений, в которых неизвестные обозначены буквами x и y, затрудняются решить аналогичную систему, где неизвестные обозначены буквами a и b;

2) учащиеся, построившие график функции, которая выражена уравнением $y = k/x$, не в состоянии построить график функции, выраженной уравнением $xy = k$ (или $pv = k$), т. е. той же функции, представленной лишь в иной форме;

3) учащиеся доказывают теорему о средней линии треугольника, когда чертеж расположен так, что средняя линия оказывается в горизонтальном положении, но затрудняются выполнить доказательство при другом ее положении;

4) учащиеся построили график логарифмической функции, но не могут найти с помощью этого графика приближенное значение логарифма данного числа или числа по данному значению его логарифма;

5) ученик безошибочно формулирует определение логарифма числа по данному основанию, но не может сказать, чему равен логарифм числа 8 по основанию 2;

6) ученик правильно формулирует теорему о трех перпендикулярах, но не может ее применять в простейших конкретных ситуациях, например в доказательстве того, что скрещивающиеся ребра правильной треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны;

7) ученик считает, что $-x$ всегда отрицательное число, так как перед x стоит знак $-$;

8) ученик знает определение абсолютной величины числа, но не может решить уравнение $|a| = 2$ или неравенство $|a| < 2$.

В каждом из приведенных примеров усматривается признак формальных знаний, определенный отрыв внешней формы (языка, чертежа) от выраженного в ней содержания, запоминание формы и непонимание содержания. Такие «знания» учащиеся не в состоянии применять в новых конкретных ситуациях, когда то же содержание облечено в новую форму, и часто ошибаются, когда различные содержания имеют сходную форму.

Важная педагогическая проблема состоит не только в том, чтобы устранять формализм в математических знаниях учащихся (хотя и эта задача возникает и должна решать-

ся), но и в том, чтобы строить обучение, не порождающее формализма.

Необходимым компонентом такого обучения является правильное изучение математического языка (терминологии и символики), достигающее понимания его семантики.

4. Активность учащихся

4.1. Сознательность усвоения предполагает активность учащихся в процессе обучения. Без активной мыслительной деятельности невозможно сознательное усвоение знаний.

Педагогика математики не может строить обучение так, чтобы у ученика осталась свобода выбора между активной мыслительной деятельностью и простым заучиванием. Она должна строить обучение математике как *активное* обучение, основой которого служит активная мыслительная деятельность всех учащихся.

4.2. Мы различаем два вида активности учащихся в процессе обучения математике. Назовем их соответственно активностью в *широком и узком смысле.*

Активность в широком смысле в обучении математике не отличается существенно от активности учащихся в процессе обучения их другим предметам. Это вообще активная мыслительная деятельность. Активность в узком смысле — это специфическая активность, мыслительная деятельность опеределенной структуры, свойственная для математики и называемая поэтому «математической» деятельностью.

Если ученик проявляет активность в узком смысле, то он проявляет и активность в широком смысле. Обратное же неверно. Ученик может проявлять активную мыслительную деятельность вообще, но она не всегда является специфической математической деятельностью, т. е. он может проявлять активность в широком смысле, но не проявлять при этом активности в узком смысле.

4.3. Проблема активного обучения математике, хотя и не нова, остается актуальной, так как до сих пор не получила удовлетворительного решения в широкой практике школьного преподавания. К тому же в связи с необходимой модернизацией обучения математике проблема активного обучения принимает и новый аспект.

На основании понимания «активного обучения» математике как обучения математической деятельности (см. Введение, 1. 3) нас интересует прежде всего построение обучения, основой которого является активность в узком смысле, и возникающие при этом проблемы.

5. Наглядность обучения

5.1. Наглядное обучение, по словам К. Д. Ушинского, такое обучение, которое строится не на отвлеченных представлениях и словах, а на конкретных образах, непосредственно воспринятых ребенком.

Наглядность особенно важна в обучении математике ввиду того, что здесь требуется достижение более высокой ступени абстракции, чем в обучении другим предметам, а она содействует развитию абстрактного мышления (разумеется, при правильном ее применении).

5.2. Из различных видов наглядности — натуральной, изобразительной, символической — широкое применение в обучении математике находит символическая наглядность (чертежи, графики, схемы, таблицы).

Средство символической наглядности представляет собой условную знаковую систему, с помощью которой изучаемая сторона предметов, явлений, процессов отделяется от прочих свойств и представляется в чистом виде. Например, обычно используемый чертеж является средством наглядности, так как отделяет изучаемую геометрическую форму (структуру) предмета от прочих его свойств и представляет ее в чистом виде.

Однако не всем сразу ясна символическая наглядность. Представляя собой условную знаковую систему, символическая наглядность по существу является своеобразным языком и, как всякий язык, должна специально изучаться, чтобы стать понятной. Только в таком случае символическая наглядность будет эффективным средством обучения.

Учащиеся с трудом понимают язык графиков. Так, многие выпускники школы не могут «прочитать» график, изображенный на рис. 4. При правильном понимании языка графиков любой выпускник школы должен примерно следующим образом «прочитать» этот график: функция, графиком которой является кривая, изображенная на рис. 4, оп-

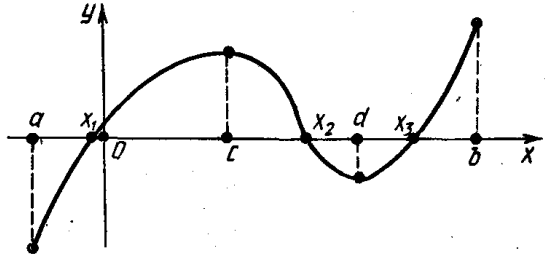


Рис. 4

ределена на отрезке $[a, b]$; возрастает на отрезках $[a, c[$ и $]d, b]$, убывает на отрезке $]c, d[$; имеет максимум в точке c и минимум в точке d; принимает значение 0 в трех точках (при трех значениях x) — x_1, x_2, x_3; принимает отрицательные значения — на отрезках $[a, x_1[$ и $]x_2, x_3[$, положительные значения — на отрезках $]x_1, x_2[$ и $]x_3, b]$.

Умение так «читать» графики функций является результатом специального обучения, включающего прежде всего изучение исходного «словаря» для перевода свойств функций (возрастание, убывание, максимум, минимум, нулевое, положительные и отрицательные значения, непрерывность) на язык графиков, а также необходимую тренировку (так же, как обучение какому-нибудь иностранному языку включает изучение словаря и тренировку в переводе различных текстов).

Вот как выглядят некоторые «строки» этого словаря:

Свойства функции

Аналитическое выражение *Графическое выражение*

f — возрастающая функция

$\forall x_1,\ x_2 \in D_f\ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$ (рис. 5, *а*)

f — убывающая функция

$\forall x_1,\ x_2 \in D_f\ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$ (рис. 5, *б*)

$f(x_0)$ —максимальное значение функции

$\exists \delta > 0\ \forall x \in D_f\ (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < f(x_0))$ (рис. 5, *в*)

(D_f — область определения f) и т. д.

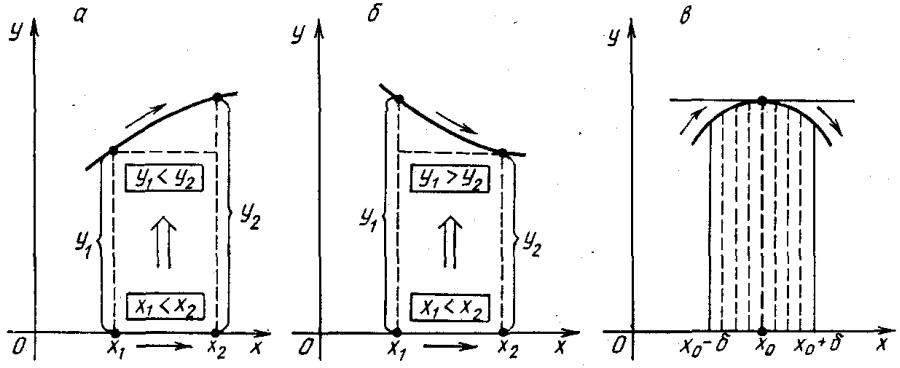


Рис. 5

Изучение этого словаря предполагает сопоставление выражений свойств функции на языке формул и на языке графиков. Например, перевод свойства возрастания функции с аналитического (или словесного) языка на язык графика можно разъяснить следующим образом: при возрастании x соответствующая точка на оси абсцисс перемещается слева направо (указано стрелкой на рис. 5). Так как при этом соответствующее значение функции тоже возрастает, то соответствующая точка графика «поднимается» снизу вверх. Таким образом, график возрастающей функции слева направо поднимается снизу вверх.

5.3. Выясним роль наглядности в процессе формирования математических понятий. Формирование понятий — сложный психологический процесс, начинающийся с образования простейших форм познания — ощущений — и протекающий по следующей схеме: ощущения — восприятие — представление — понятие.

Обычно различают две ступени этого процесса: *чувственную,* состоящую в образовании ощущений, восприятия и представления, и *логическую*, заключающуюся в переходе от представления к понятию с помощью обобщения и абстрагирования.

Чувственная ступень в процессе формирования понятий соответствует первому этапу пути познания, т. е. «живому созерцанию», и поэтому осуществление этой ступени требует применения средств наглядности. Если ученику никогда не показывали модели куба, то у него не может образоваться и представления о кубе, а следовательно, невозможно и формирование у него понятия куба.

Использование наглядности в процессе формирования понятий будет эффективным, если оно ориентирует учащихся на обобщение и абстрагирование существенных признаков формируемого понятия. Для формирования понятия куба надо показать учащимся (в начальных классах) множество предметов, отличающихся друг от друга формой, размерами, окраской, материалом, из которого они сделаны (некоторые из них должны иметь форму куба). Ученики (уже в первом классе), после того как им показывают на одно из этих тел и говорят, что это куб, безошибочно отбирают из множества тел все те, которые имеют такую же форму, пренебрегая различиями, касающимися размера, окраски, материала. Здесь выделение из множества предметов подмножества, отождествление тел производится по одному еще недостаточно проанализированному признаку —

внешней форме. Школьники еще не знают свойств куба, они распознают его только по форме.

Дальнейшая работа по формированию понятия куба состоит в анализе этой формы с целью выяснения ее свойств. И в данном случае также используется наглядный материал. Учащимся предлагают путем наблюдения найти, что есть общего у всех отобранных тел, имеющих форму куба, чем они отличаются от остальных. Устанавливается, что у всех кубов 8 вершин, 6 граней. Но у некоторых тел, которые мы не отнесли к кубам, тоже 8 вершин и 6 граней. Оказывается, у куба все грани — квадраты (эта работа обычно проводится после аналогичной работы по выделению подмножества квадратов из множества плоских фигур).

Как видно, такое применение наглядного материала оказалось эффективным, так как помогло учащимся осуществить «обобщение», т. е. выделить общие свойства, присущие всем кубам. Остается один шаг к образованию понятия куба: абстрагировать, т. е. отделить эти общие свойства от прочих, несущественных свойств. Разумеется, на этом начальном этапе нельзя еще говорить о полном абстрагировании этих свойств, у детей еще не образовывается понятие куба в чистом виде, они не могут еще дать логическое определение и противопоставляют куб прямоугольному параллелепипеду с различными измерениями. В дальнейшем, когда будет сконструирована логически упорядоченная система понятий, учащиеся сами придут к выводу, что куб — это вид прямоугольного параллелепипеда. В этом единстве противоположностей — диалектика развития понятий. Приведенный пример показывает, как применение наглядного материала в процессе формирования понятий должно быть направлено на развитие обобщающей и абстрагирующей деятельности учащихся.

5.4. Процесс формирования математических понятий не всегда протекает по приведенной схеме (см. 5. 2). В частности, когда формируемое понятие связано в той или иной форме с категорией бесконечности (как, например, понятия прямой, плоскости, плотности множества рациональных чисел, предела и др), то чувственная ступень отсутствует, так как мы не в состоянии воспринимать бесконечное (ни в какой форме), и наглядность из средства, способствующего формированию понятия, становится тормозящим фактором.

Например, бесконечность множества рациональных чисел, лежащих между любыми двумя рациональными числами, не подкрепляется, а, наоборот, опровергается конкрет-

ным восприятием конечного отрезка, содержащего это множество. Свойство плотности множества рациональных чисел нельзя обнаружить опытным путем, оно не подтверждается наглядными геометрическими представлениями, а устанавливается логически. Этот пример подтверждает выводы наших психологов о том, что восприятие наглядного материала в силу объективных особенностей этого материала может играть не только положительную, но и отрицательную роль.

Наглядность может также играть отрицательную роль в силу неправильного применения в процессе обучения.

5.5. Эффективность наглядного обучения зависит от правильного выбора средств наглядности и от их правильного применения в процессе обучения.

В качестве примера рассмотрим вопрос о применении чертежа в планиметрии и стереометрии.

При изучении планиметрии чертеж является основным средством наглядности, при изучении же стереометрии он уже не является таким верным помощником учителя. Это объясняется тем, что чертеж плоской фигуры сохраняет по меньшей мере ее форму и поэтому может служить для изучения свойств этой формы, а чертеж пространственного тела, являясь некоторой проекцией этого тела на плоскость чертежа, искажает форму и взаимное расположение элементов этого тела. Например, на чертеже правильной четырехугольной пирамиды квадрат, лежащий в ее основании, изображается в виде параллелограмма, а скрещивающиеся ребра — в виде пересекающихся.

Возникает педагогическая задача: научить школьников видеть на искаженном изображении пространственного тела его истинную форму и действительное взаимное расположение его элементов. Чтобы решить эту задачу, необходимо при переходе к изучению стереометрии широко использовать *модели* пространственных тел и различных ситуаций геометрических элементов в пространстве, сопоставляя их с изображениями этих тел и ситуаций на плоскости.

Сочетание моделей и чертежей не должно быть одним и тем же во всем курсе стереометрии. Его целесообразно варьировать, придерживаясь схемы: 1) модель; 2) модель-чертеж; 3) чертеж-модель; 4) чертеж.

Иначе говоря, если в начале курса стереометрии, когда учащиеся еще не умеют «читать» чертежи пространственных тел (имеется в виду начало пропедевтического изучения элементов стереометрии), основным средством наглядности является модель, то по мере продвижения роль чертежа уве-

личивается, и в конце курса, когда ученики уже научились правильно читать чертежи, можно полностью обойтись без моделей.

Использование моделей должно быть направлено на обучение школьников чтению чертежей пространственных тел и ситуаций. Неправильное сочетание моделей и чертежей в преподавании стереометрии, недостаточное или избыточное использование моделей может иметь отрицательные последствия.

Приведем два примера из школьной практики: 1) ученик пытался использовать точку пересечения изображений двух скрещивающихся ребер пирамиды для решения предложенной ему задачи, связанной с этой пирамидой; 2) выпускница средней школы, получив задачу на вступительных экзаменах в вуз, пыталась сложить из спичек (специально принесенных ею) модель пирамиды с сечением, о которой шла речь в задаче. Эти примеры хорошо иллюстрируют последствия двух нарушений правильного сочетания моделей и чертежей в преподавании стереометрии.

5.6. Примером нового средства наглядности являются простейшие графы, которые могут эффективно использоваться для представления бинарных отношений и функций, определенных на конечных множествах. По одному виду графа легко установить свойства отношения (если в каждой вершине графа имеется «петля», то отношение рефлексивно; если ни в одной вершине нет петли, то оно антирефлексивно; если же имеются вершины с петлями и вершины без петель, то отношение не является ни рефлексивным, ни антирефлексивным и т. д.).

Логико-математический язык наряду с другими «педагогическими» качествами, о которых мы будем говорить дальше, обладает и «наглядностью». Речь идет о новом виде наглядности, который мы разъясним здесь лишь на нескольких примерах. Однако само использование логико-математического языка в нашем дальнейшем изложении неоднократно покажет эту наглядность «в работе».

Так же как чертеж обнажает геометрическую форму (структуру) предмета и представляет ее в чистом виде, символическая запись на логико-математическом языке предложений и рассуждений обнажает их логическую форму (структуру) и представляет ее в чистом виде. Поэтому она также служит средством наглядности при решении соответствующих педагогических задач (разъяснение точного смысла высказываний сложной структуры, выявление различия в понятиях, отыскание пути доказательства и т. д.).

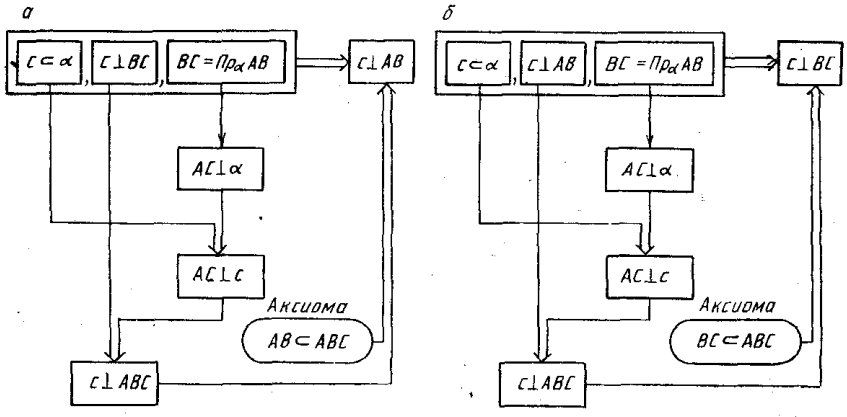


Рис. 6

Например, известно, что учащиеся путают понятия неограниченной последовательности и последовательности, стремящейся к бесконечности. Чтобы научить их четко различать эти понятия, целесообразно сравнить структуру их определений:

$$\forall l > 0 \; \exists n_0 \in N \; (|a_{n_0}| > l); \qquad (1)$$

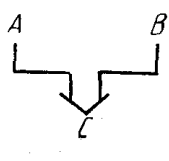
$$\forall l > 0 \; \exists n_0 \in N \; \forall n \in N \; (n > n_0 \Rightarrow |a_n| > l). \qquad (2)$$

Пользуясь этими записями как «наглядными» представлениями структуры определений, легко обнаруживаем, что (2) содержит более «сильное» требование, чем (1); из (2) следует (1), но из (1) не следует (2). Например, последовательность

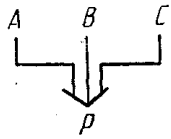
$$1, \; \frac{1}{2}, \; 2, \; \frac{1}{4}, \; 3, \; \frac{1}{8}, \; \ldots, \; n, \; \frac{1}{2^n}, \; \ldots$$

удовлетворяет требованию (1), но не удовлетворяет (2).

Символическая запись теорем позволяет наглядно представить и доказательства в виде графоподобных структурных схем. Эти схемы, раскрывая идею и логику доказательства, являются одновременно кратким *конспектом,* составленным на общепонятном языке. Вершинами графа доказательства служат предложения, участвующие в нем, а стрелки указывают, что из чего следует. Если из предложений A и B следует заключение C, то это изображается так:



Изображение того, что из A, B, C следует P, выглядит так:



На рис. 6, *а* изображена структурная схема доказательства теоремы о трех перпендикулярах, а на рис. 6, *б* — доказательства обратной теоремы. Эти схемы настолько наглядны, что по ним вспоминается и чертеж (играющий второстепенную роль в доказательстве) и весь ход доказательства, а также ясно выступает различие между доказательствами двух теорем.

6. Прочность знаний

6.1. Принцип прочности знаний требует, чтобы у учащихся сохранились на длительное время систематизированные знания, умения и навыки. Это невозможно осуществить путем простого заучивания, без глубокого понимания изучаемого материала.

Таким образом, одним из необходимых условий прочности знаний является сознательность усвоения. Но сознательность усвоения обеспечивается, как мы видели выше, активной мыслительной деятельностью учащихся. Поэтому необходимым условием прочности знаний является приобретение их активным способом. Однако это условие еще не является достаточным.

Разрозненные, несистематизированные, не связанные общими идеями знания не могут быть прочными. Но систематичность обеспечивается научностью обучения. Таким образом, другим необходимым условием прочности знаний является научность обучения.

Научность и сознательность, вместе взятые, не являются еще достаточным условием прочности знаний. Если бы прочность была следствием научности и сознательности, то отпала бы необходимость выделения ее в качестве отдельного принципа. Для обеспечения прочности знаний необходима еще соответствующая организация обучения, учитывающая результаты исследований механизма запоминания.

В педагогике математики мы воспользуемся некоторыми общепедагогическими положениями, отражающими результаты психолого-педагогических исследований, а именно: а) запоминание находится в прямой зависимости от повторения; б) память имеет избирательный характер — запоми-

нается преимущественно то, что для нас существенно, интересно; в) материал запоминается лучше, когда мотивом является применение его на практике; г) запоминанию способствует разбиение изучаемого материала на небольшие порции по смысловому содержанию с выделением опорных пунктов в форме тезисов, заголовков, вопросов; д) эмоционально окрашенный материал при прочих равных условиях запоминается лучше.

К этим общепедагогическим положениям добавим лишь некоторые замечания, касающиеся обучения математике.

6.2. Прежде всего возникает вопрос, что должен запоминать ученик. Вопрос этот сложнее, чем может казаться на первый взгляд, и мы воздержимся от исчерпывающего ответа в виде перечня всего того, что подлежит запоминанию. Будем считать это интуитивно более или менее ясным.

Совершенно очевидно, что все запоминать на длительное время не нужно, да и невозможно. Например, надолго не запоминаются все точные формулировки математических предложений (определений, аксиом, теорем). Это, однако, не означает, что и соответствующие понятия, свойства и отношения между объектами, выражаемые этими предложениями, полностью исчезают из сознания. Так, понятие предела последовательности может остаться интуитивно ясным и после того, как забыто его точное математическое определение. Но это возможно лишь в том случае, если изучение данного понятия было построено так, что прежде всего его сделали для учащихся интуитивно ясным и лишь затем — точным математическим понятием, описанным формальным определением.

Отсюда мы делаем важный вывод для педагогики математики: строгие математические формулировки (определений, теорем) должны быть итогом изучения соответствующих объектов, свойств, отношений на интуитивном уровне.

Не запоминаются, разумеется, и доказательства теорем, изучаемые в школе. Очевидно, что обучение и не должно быть направлено на заучивание учащимися отдельных доказательств. Оно должно обеспечить такое развитие мыслительной деятельности, которое дало бы возможность школьникам самостоятельно искать и находить доказательства, когда в этом возникает необходимость.

6.3. Повторение ранее изученного материала в связи с его применением к изучению нового материала является наиболее важным видом повторения. Оно связывает различ-

ные понятия, предложения в систему, способствующую лучшему запоминанию как старого, так и нового материала.

В силу специфических особенностей построения математических теорий именно этот вид повторения и должен быть составной частью обучения математике.

В преподавании математики необходимо использовать и другие виды повторения, в частности обзорное повторение темы, раздела. Последнее не предполагает точного и полного воспроизведения ранее изученного материала с новой точки зрения или на новом, более высоком уровне. Важную роль в обзорном повторении играет классификация понятий (чисел, алгебраических выражений, многоугольников, многогранников), способствующая раскрытию логических связей.

7. Индивидуальный подход

1.1. Рассматривая обучение как процесс управления, мы приходим к выводу, что для осуществления эффективного процесса обучения надо учитывать особенности обучаемого (управляемого объекта). Здесь имеются в виду особенности мышления каждого ученика, свойства его памяти, отдельных анализаторов (слух, зрение), а также его характер и воля. Без учета этих особенностей мы не можем достичь доступности обучения.

Даже у учащихся одного возраста указанные особенности весьма различны. Поэтому один и тот же материал одни учащиеся усваивают быстрее, а другие — медленнее. Это обусловливает необходимость индивидуального подхода в обучении.

Практическое осуществление индивидуального подхода при традиционной организации процесса обучения наталкивается на серьезные трудности. Обучая одновременно примерно 30 учащихся, мы не в состоянии учитывать индивидуальные скорости усвоения. Здесь неизбежна ориентировка на какого-то «среднего» ученика. Но это приводит к отрицательным последствиям. С одной стороны, слабые учащиеся, находящиеся ниже уровня «среднего», скоро становятся неуспевающими. Это та категория учеников, у которых при традиционном обучении математике создается мнение, что «они не созданы для математики» или что «математика не для них». С другой — сильные учащиеся, находящиеся выше «среднего» уровня, скоро начинают скучать на уроках и теряют интерес к предмету.

Если можно было бы как-то «измерить» скорости усвоения математического материала различными учащимися, то определенно обнаружился бы намного больший разброс, чем по другим предметам. Это объясняется тем, что усвоение математического материала требует более интенсивной мыслительной работы, более высокого уровня обобщающей и абстрагирующей деятельности. Этим и объясняется то, что ориентировка на «среднего» ученика в преподавании математики приводит к низкой успеваемости.

1.2. С точки зрения необходимости осуществления индивидуального подхода, очевидно, идеальными условиями обучения являются такие, при которых на одного учителя приходится один ученик. Но такие условия нереальны, и поэтому необходимо искать пути осуществления индивидуального подхода при существующей классно-урочной системе организации обучения.

В этом направлении можно отметить такие формы обучения, как индивидуальные дополнительные занятия со слабыми учащимися (которые должны носить строго индивидуальный характер) и внеклассные, кружковые занятия с сильными для развития их интереса к математике.

Одно из возможных решений проблемы индивидуального подхода связано с современным направлением поисков по усовершенствованию процесса обучения, известным под названием *программированного обучения.*

5. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ ЭМПИРИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

1. Постановка проблемы

1.1. Рассмотрим обучение одному из аспектов математической деятельности, который мы назвали математической организацией эмпирического материала или математическим описанием (математизацией) ситуаций.

Математическая организация эмпирического материала осуществляется на различных этапах обучения: а) когда ученик еще не владеет определенным математическим аппаратом и решается педагогическая задача овладеть этим аппаратом, выделить математические понятия из конкретных ситуаций, открыть математические закономерности, отражающие свойства рассматриваемой предметной области; б) когда ученик уже владеет необходимым математическим аппаратом и цель математического описания эмпирического материала состоит в применении уже известных математи-

ческих понятий в конкретной ситуации для решения связанных с нею задач. Разумеется, эти два аспекта математической организации эмпирического материала существенно отличаются по своей логической структуре.

1.2. Предметом нашего рассмотрения является первый из этих аспектов математической организации (второй рассматривается в главе 11 в связи с обучением решению задач).

Основными компонентами рассматриваемого аспекта математической деятельности являются наблюдение, опыт, индукция, аналогия, обобщение и абстрагирование. Как видно, основную роль здесь играют так называемые *индуктивные методы.* К ним в основном сводится и метод открытий (эвристический метод). В практике мышления перечисленные компоненты применяются одновременно. Мы рассмотрим их в отдельности лишь с целью некоторого анализа.

В целом же математизация представляет собой своеобразную деятельность по *переводу* описаний ситуаций, задач с нематематического на математический язык (или с языка одной математической теории, например геометрии, на язык другой теории, например алгебры) или по построению математических моделей этих ситуаций, задач (или по построению алгебраической модели геометрической ситуации, или, наоборот, геометрической модели алгебраической ситуации).

2. Наблюдение и опыт

2.1. Наблюдение и опыт — методы, используемые, в частности, в экспериментальных естественных науках. Математика не является экспериментальной наукой, и, следовательно, опытное подтверждение не может служить достаточным основанием истинности ее предложений. Это верно, если касаться математики как дедуктивной теории, т. е. по существу одной ее фазы. Но она имеет еще две фазы — предшествующую дедуктивной теории фазу накопления фактов (опытную, интуитивную) и следующую за ней фазу приложений.

Эти две фазы, независимо от того, считают ли их собственно математическими или «околоматематическими», не менее важны в обучении, чем сама дедуктивная теория: первая — для понимания этой теории, вторая — для ее оправдания. Совершенно очевидно, что нужно не меньше заботиться о том, чтобы сделать изучаемое понятным, чем о том, чтобы доказывать на достачном уровне строгости.

Опыт показал, что на раннем этапе обучения более глубокое и прочное усвоение изучаемого материала обеспечивает содержательное и доходчивое индуктивное обоснование фактов, а не формально-дедуктивное. Слишком раннее введение обычно заучиваемых на память дедуктивных доказательств, вместо того чтобы способствовать логическому развитию учащихся, как правило, задерживает его. Так, например, бесспорно, что в младших классах основную роль должны играть индуктивные, в частности опытные методы установления фактов, в том числе использование непосредственного опыта учащихся. В геометрии, например, для этой цели следует шире использовать вырезание фигур из бумаги, сгибание, наложение и т. п. Можно возразить, что это собственно не геометрия, а физика. Действительно, экспериментальные методы, свойственные физике, мы используем при изучении абстрактных геометрических объектов на конкретной физической модели. Но, очевидно, можно на определенном этапе обучения заниматься и такой физикой, чтобы в дальнейшем достичь лучшего понимания математики.

Исходя из изложенных соображений, приходим к выводу о необходимости более широкого использования в младших классах наблюдения и опыта и основанной на них интуиции учащихся в сочетании с постепенно усиливающимися элементами дедукции. Это следует осуществлять по мере того, как у школьников воспитывается с помощью специально создаваемых ситуаций потребность в логическом доказательстве.

В установившейся практике обучения стремятся создавать иллюзию строгости замалчиванием логических пробелов и воспитывать у учащихся преклонение перед логическим доказательством и недоверие к опыту, к практической проверке истинности предложений, причем делается это на таком этапе обучения, когда опыт более убедителен для учеников, чем логическое доказательство. Этим самым логический способ обоснования противопоставляют критерию практики, вместо того чтобы этот критерий положить в основу логического способа.

Так, на вопрос «чем занимались на уроке геометрии?» ученик VI класса отвечал: «Учитель нарисовал на доске два равных треугольника и долго доказывал, что они равны». Не лучше ли построить два треугольника по одним и тем же элементам, скажем, по трем сторонам, вырезать эти треугольники и наложить один на другой, чем приводить непонятное школьникам и к тому же нестрогое доказательство?

Наблюдение и опыт должны быть направлены на созда-

ние специальных ситуаций, на предоставление учащимся возможности извлечь из них очевидные закономерности, геометрические факты, идеи доказательства и т. д. Чаще всего результаты опыта служат посылками индуктивных выводов, с помощью которых осуществляются открытия.

Проиллюстрируем данное положение несколькими примерами.

2.2. Если показать учащимся множество различных фигур, в том числе окружающих нас предметов (архитектурных и строительных деталей, листьев деревьев и т. д.), обладающих или не обладающих симметрией (осевой), то можно заметить следующее. Каждая из «симметричных» фигур делится некоторой прямой на две равные части так, что, если согнуть фигуру по этой прямой, одна часть ее полностью совпадет с другой. Для каждой же из «несимметричных» фигур такой прямой найти нельзя.

После подобного небольшого наблюдения «симметричных» фигур можно перейти к изучению осевой симметрии с помощью эксперимента. Каждому ученику предлагается согнуть лист бумаги так, чтобы одна часть листа совпала с другой и образовалась *линия сгиба.* Затем предлагается выпрямить снова лист и отметить на нем произвольную точку A, не лежащую на линии сгиба, затем снова согнуть лист по той же линии сгиба и определить, глядя на свет через согнутый лист, с какой точкой совпала при этом точка A. Пусть эта точка — A_1. Учащимся сообщают, что точки A и A_1 называются *симметричными* относительно прямой x (линии сгиба), называемой *осью симметрии* этих точек. Для другой точки B, лежащей по другую сторону от линии сгиба, чем точка A, предлагается определить (опытным путем, с помощью сгибания листа) симметричную ей точку относительно той же оси x. Замечаем, что если взять точку C на линии сгиба, она остается неподвижной при сгибании листа, т. е. не совпадает с какой-либо другой точкой листа. Мы говорим, что любая точка оси симметрии (линии сгиба) *сама себе симметрична.*

Рассматриваются свойства расположения относительно оси симметричных точек (A, A_1), (B, B_1). Учащиеся замечают, что симметричные точки (если они не совпадают) всегда лежат по разные стороны от оси симметрии. Предлагается соединить симметричные точки отрезком прямой. Ученики высказывают предположение, что симметричные точки отстоят на равных расстояниях от оси симметрии, т. е. что отрезки AA_1, BB_1 делятся пополам осью симметрии. Это предположение подкрепляется с помощью измерения соответст-

вующих отрезков. Если учащиеся не замечают перпендикулярности AA_1 (и BB_1) к оси симметрии (обычно равенство углов не так быстро замечается, как равенство отрезков), то берут две точки, равноотстоящие от оси по разные стороны от нее, но не на одном перпендикуляре к ней, и задают вопрос, будут ли эти точки симметричны относительно той же оси. Сопоставляя расположение этих точек с расположением симметричных точек, учащиеся обнаруживают и последнее свойство: симметричные точки лежат на одном перпендикуляре к оси симметрии. Это пока предположение, которое также подкрепляется измерением соответствующих углов.

Возникает вопрос, нельзя ли убедиться в правильности наших предположений, не производя измерений. Учащимся предлагают согнуть лист бумаги по оси симметрии, тогда точка A совпадет с точкой A_1, а отрезок AM — с отрезком A_1M (M — точка пересечения отрезка AA_1 с осью). Отсюда и делают вывод о равенстве отрезков AM и A_1M и углов, образованных этими отрезками с осью симметрии (рис. 7).

Таким образом, из эмпирического материала (листа бумаги) с помощью опыта (сгибания) и наблюдения получаем математический материал (математическое описание конкретной ситуации).

Имеется отображение S_x плоскости на себя, при котором: p_1 — каждая из полуплоскостей, определяемых прямой x (линией сгиба), отображается на другую; p_2 — каждая точка прямой x отображается на себя (совпадает со своим образом); p_3 — расстояние между любыми двумя точками сохраняется неизменным (равно расстоянию между их образами); p_4 — любые две различные соответствующие точки лежат по разные стороны от прямой x; p_5 — любые две различные соответствующие точки лежат на одном перпендикуляре к прямой x; p_6 — любые две различные соответствующие точки лежат на одинаковом расстоянии от прямой x.

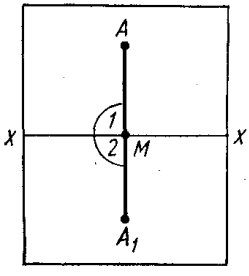


Рис. 7

Полученный опытным путем математический материал в виде множества из шести предложений $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$ подлежит логической организации (см. гл. 9).

2.3. Приведем пример, когда опыт способствует открытию геометрического свойства и подсказывает путь его логического доказательства.

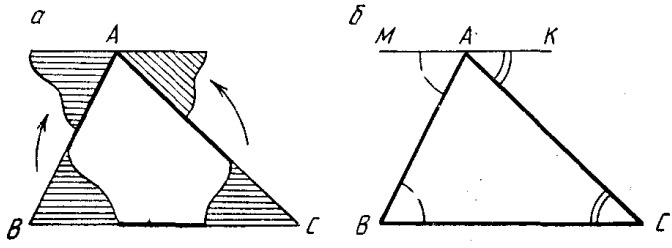


Рис. 8

Как только учащиеся научатся измерять углы с помощью транспортира, они смогут экспериментально обнаружить, что сумма углов треугольника равна 180°. Им предлагается измерить транспортиром углы начерченного в тетради треугольника и сложить результаты измерения. У некоторых сумма углов треугольника получается меньше 180°, у других — больше, но у всех результаты близки к 180°, а у некоторых — даже «точно» 180° (!). Ученики догадываются, что должно получиться 180°, и другой результат объясняется погрешностями измерения. Они «совершают открытие»: «во всяком треугольнике сумма внутренних углов равна 180°».

Это предложение подкрепляется вторым опытом, раскрывающим идею доказательства. У каждого школьника заготовлен вырезанный из бумаги треугольник. Учитель предлагает «оторвать» два угла и приложить их к третьему так, как он это делает сам на большом треугольнике (рис. 8, *а*).

Учащиеся замечают, что получено три угла с общей вершиной A, расположенных по одну сторону от прямой. Следовательно, сумма этих углов равна 180°. Но можно ли быть уверенным в том, что два луча, сходящиеся в точке A, образуют прямую линию? Ведь они могут образовать ломаную, так мало отличающуюся от прямой, что мы этого и не заметим. Но в этом случае сумма углов уже не будет равна 180°.

Таким образом, проведенный опыт еще не представляет собой доказательства, но он подсказывает его путь. Действительно, вместо того, чтобы отрывать два угла и прикладывать их к третьему, мы чертим треугольник ABC (рис. 8, *б*) и в вершине A проводим луч AM, образующий угол MAB, равный углу B, и луч AK, образующий угол KAC, равный углу C. Надо доказать, что лучи AM и AK образуют одну прямую. Это устанавливается без особых затруднений: учащиеся обнаруживают, что $AM \parallel BC$ и $AK \parallel BC$ (на-

крест лежащие углы равны), и так как по аксиоме параллельных через точку A не проходит более одной прямой, параллельной BC, то лучи AM и AK образуют одну прямую и $\angle MAB + \angle A + \angle KAC = 180°$ или $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

3. Индукция

3.1. Восхождение от частного к общему, от фактов, установленных с помощью наблюдения и опыта, к обобщениям является закономерностью познания. Неотъемлемой логической формой такого восхождения является *индукция*, представляющая собой метод рассуждений от частного к общему, вывод общего заключения из частных посылок.

Пусть $A = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$ — множество всевозможных частных случаев, в каждом из которых некоторое свойство C может быть истинным или ложным (имеет место или не имеет места).

Известно, допустим, что в k случаях имеет место свойство C, т. е. имеются посылки $C(a_1)$, $C(a_2)$, ..., $C(a_k)$.

Индуктивное рассуждение строится по схеме

$$\frac{C(a_1),\ C(a_2),\ \ldots,\ C(a_k)}{\forall x\ C(x)\ (?)}. \qquad (1)$$

Когда A — конечное множество, содержащее k элементов (всевозможных частных случаев — k), т. е. наши посылки исчерпывают всевозможные частные случаи, схема (1) представляет собой правило вывода, основанное на эквивалентности

$$\forall x\ C(x) \Leftrightarrow C(a_1)\ \text{и}\ C(a_2)\ \text{и},\ \ldots,\ \text{и}\ C(a_k),$$

и заключение достоверно (истинно, если истинны посылки).

В этом случае рассуждение, построенное по схеме (1), называется *полной индукцией*.

Примером полной индукции может служить рассуждение, завершающее доказательство теоремы об измерении вписанного угла, если она доказывается отдельно для случая, когда центр окружности лежит на стороне угла, внутри или вне угла.

Пусть a_1 — случай, когда «центр лежит на стороне угла», a_2 — когда «центр лежит внутри угла» и a_3 — когда «центр лежит вне угла», тогда $\{a_1, a_2, a_3\}$ — множество всевозможных частных случаев, и пусть $C(a_i)$ означает «теорема доказана в случае a_i». Тогда с помощью рассуждения по схеме

$$\frac{C(a_1),\ C(a_2),\ C(a_3)}{\forall x\ C(x)}$$

заключаем, что теорема доказана для всех возможных частных случаев или что «теорема доказана».

Если же множество A всех возможных частных случаев содержит более чем k элементов или же бесконечно (что особенно часто встречается в математике), т. е. когда наши посылки не исчерпывают всевозможные частные случаи, тогда правомерно ставить знак вопроса рядом с заключением. Это мы и сделали в схеме (1), чтобы подчеркнуть, что данное заключение не является достоверно истинным высказыванием, а лишь вероятно истинно (правдоподобно) при истинности посылок.

В этом случае рассуждение, построенное по схеме (1), называется *неполной индукцией.*

Ввиду недостоверности заключения неполная индукция не может служить методом доказательства в математике. Но она является мощным «эвристическим» методом, т. е. методом открытия новых истин. В таком качестве неполная индукция и должна широко применяться в школьном обучении (далее под «индукцией» будем понимать неполную индукцию).

3.2. Индукция может привести к ложному заключению, так как посылки не исчерпывают всевозможные частные случаи. Так, например, вычисляя значения выражения $n^2 + n + 17$ при $n = 1, 2, 3, ..., 15$, получаем неизменно простые числа, и это наводит нас на мысль, что значение этого выражения при любом натуральном n есть простое число.

Иначе говоря, на основании пятнадцати частных посылок получено общее заключение, относящееся к бесконечному множеству частных случаев (N), и это заключение оказывается ложным, так как уже при $n=16$ получаем составное число: $16^2+16+17=16\times17+17=17^2$.

В истории математики были случаи, когда известные математики ошибались в своих индуктивных выводах (например, П. Ферма предположил, что все числа вида $2^{2^n}+1$ простые, исходя из того, что при $n=1, 2, 3, 4$ они являются таковыми, но Л. Эйлер нашел, что уже при $n = 5$ число $2^{32}+1$ не является простым, оно делится на 641).

Однако возможность получения с помощью индукции ложного заключения не может быть достаточным основанием для отрицания роли индукции в школьном обучении математике. Во-первых применение индукции в обучении должно направляться учителем к открытию истин. Во-вто-

рых, надо добиваться понимания учащимися правдоподобности индуктивного заключения. Поэтому и необходимо, применяя индукцию, всячески подчеркивать, что заключение является лишь предположением, гипотезой, которое должно быть доказано (если оно истинно) или опровергнуто (если оно ложно).

3.3. Обратимся еще раз к приведенному выше (см. п. 2.3) примеру открытия учащимися свойства суммы углов треугольника. Здесь результаты опыта (измерения) служат посылками для индукции (хотя и не являются точными). Поэтому необходимо разъяснить ученикам, что мы можем высказать лишь предположение (гипотезу) о том, что «во всяком треугольнике сумма углов равна 180°». Во-первых, результаты опыта лишь близки к 180°; во-вторых, предполагая, что все отклонения в одну или другую сторону вызваны неизбежными погрешностями измерений, и принимая, что для каждого из 30 треугольников, в которых мы производили измерения углов, сумма углов действительно равна 180°, можно заключить, что она составляет 180° в любом из этих треугольников.

Такими разъяснениями мы и добиваемся понимания учащимися правдоподобного характера индуктивного заключения.

3.4. Иногда задают вопрос, сколько надо рассматривать частных посылок, чтобы подвести учащихся к открытию общей закономерности. На этот вопрос, очевидно, нельзя дать ответ, пригодный для всех случаев применения индукции. Необходимо, чтобы частное содержание, которое выражается в посылках и не должно входить в общее заключение, варьировалось, т. е. видоизменялось от посылки к посылке. Это облегчит школьникам выявление того общего, неизменного, что составляет содержание заключения.

В практике встречаются ошибочные применения индукции, когда учащимся не предлагается необходимое разнообразие частных посылок. Например, учитель хотел привести учеников к открытию правила умножения десятичных дробей индуктивным путем, но из-за недостатка времени предложил только один пример, в котором во множимом и множителе вместе было всего три десятичных знака. После этого он поставил перед классом вопрос: «Какое правило мы нашли для умножения десятичных дробей?». Ученик ответил: «Чтобы умножить десятичные дроби, мы умножаем их как целые числа, не обращая внимания на запятые, а в произведении отделяем справа три десятичных знака». Вот к какому открытию можно привести учащихся, если строить ин-

дукцию на базе одной частной посылки! Возможно, что кто-нибудь из учащихся догадался, как сформулировать общее правило, но ведь наша цель — создание такой педагогической ситуации, в которой все или в крайнем случае большинство учеников поймут, как это сделать, а для этого надо правильно подобрать последовательность частных посылок.

4. Аналогия

4.1. Наряду с индукцией в процессе математической организации эмпирического материала применяется и аналогия.

В рассуждении по аналогии заключение вообще является лишь правдоподобным, а не достоверным, имеет характер предположения, догадки (именно по этому признаку аналогию часто относят к индуктивным рассуждениям).

Не претендуя на точность, можно сказать, что рассуждение по аналогии распространяет сходство предметов (или множеств предметов) в одних свойствах на другие свойства. Сразу же следует отметить, что в этом «разъяснении» само понятие «сходство» не обладает достаточной ясностью. Когда говорят, например, о сходстве между людьми, между человеком и его изображением на фотоснимке, разумеется, интуитивно понимают, что означает сходство. Но можно ли в таком же смысле говорить, например, о сходстве между множеством учащихся класса и множеством $A = \{1, 2, 3, ..., 30\}$, или между множеством точек прямой и множеством вещественных чисел, или между множеством объектов на некотором участке и планом этого участка? Применение же аналогии в математическом исследовании, а поэтому и в обучении математической деятельности, характеризуется чаще всего именно тем, что оно основано на сходстве между структурами множеств предметов различной природы с отношениями, имеющими совершенно различный смысл, при отсутствии всякого внешнего «сходства» (в обычном смысле) между этими множествами.

Рассмотрим пример (который может быть предметом изучения в старших классах). Пусть дана электрическая цепь с одним источником энергии E, потребителем $П$ и двумя контактами (выключателями) K_1 и K_2, образующими в совокупности схему (рис. 9).

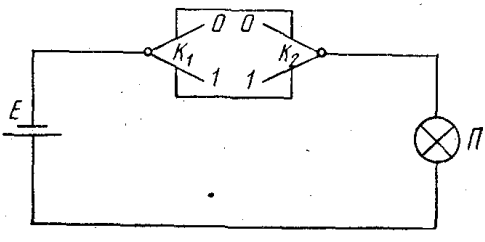


Рис. 9

Наша цель — математическое описание схемы, т. е. состояния контура (проходит или не проходит через него ток) при всевозможных положениях контактов K_1 и K_2.

Для каждого из двух выключателей возможны два положения, которые можно обозначать любыми символами, например «0» и «1». В таком случае множеству всевозможных положений пары контактов K_1 и K_2 соответствует множество пар из нулей и единиц: (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1).

Если, воспользовавшись теми же символами «0» и «1», обозначить состояние контура (когда ток не проходит — через «0», когда проходит — через «1»), то легко построить соответствие, сопоставляющее с каждой возможной парой положений контактов K_1 и K_2 определенное состояние контура, которое характеризует данную схему:

$$\begin{aligned}(0,\ 0) &\to 1,\\ (0,\ 1) &\to 0,\\ (1,\ 0) &\to 0,\\ (1,\ 1) &\to 1.\end{aligned}$$

Мы получили функцию f или отображение $\{0, 1\} \xrightarrow{f} \{0, 1\}$.

Если отвлечься от физических представлений, из которых мы исходили, то остается абстрактное отношение — математический объект f, представляющий собой «математическую модель» физического объекта — электрической цепи, изображенной на рис. 9.

В свою очередь эта электрическая цепь представляет собой «физическую модель» математического объекта — функции f. (Хотя мы пользуемся не точным определением, а лишь интуитивным представлением о том, что такое «модель», здравый смысл нам подсказывает, что отношение «быть моделью» должно быть симметричным, т. е. модель некоторой системы сама моделируется этой системой). Но эта функция как абстрактный математический объект может иметь и другие модели, и сама является математической моделью других систем, отличающихся по природе объектов и смыслу отношений от системы объектов, образующих электрическую цепь.

Например, если «0» интерпретировать как ложное высказывание, «1» — как истинное высказывание, то f моделирует эквивалентность $X \Leftrightarrow Y$ или конъюнкцию двух импликаций $(X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)$, и, обратно, эта эквивалентность является «логической» моделью функции f, а следовательно, и электрической схемы, так как интуитивно ясно, что отношение «быть моделью» должно быть и транзитивным.

Тот факт, что электрическая схема (см. рис. 9) и «логическая схема» (эквивалентность двух высказываний) имеют одну и ту же математическую модель — функцию f — свидетельствует о том, что при отсутствии всякого внешнего сходства эти две системы обладают глубоким внутренним сходством. Выявление этого сходства и позволяет описывать данные системы с помощью одной функции. Все общее, что имеется в двух системах объектов, сохраняется в их математической модели; все то, чем они отличаются, не учитывается при их математическом описании.

Возможность математической организации различных предметных областей с помощью одного и того же математического аппарата, а также применения аппарата одной математической теории в другой выясняется рассуждениями по аналогии, основанными на глубоком сходстве между некоторыми множествами предметов различной природы. Это — структурное сходство, получившее точное математическое описание с помощью понятия *изоморфизма*, играющего фундаментальную роль в современной математике.

4.2. Находить сходство, которое могло бы служить источником плодотворных рассуждений по аналогии, бывает нелегко даже в том случае, когда природа сопоставляемых объектов одинакова.

Возьмем для примера две геометрические фигуры: треугольник и тэтраэдр. В чем состоит сходство между этими фигурами? Треугольник — плоская фигура, тетраэдр — пространственная. Может быть сходство в том, что грани тетраэдра — треугольники? Если даже принять, что в этом есть какое-то сходство (а пока не уточнено, что такое «сходство»,— можно понимать под этим что угодно), то вряд ли оно может быть источником для рассуждений по аналогии.

Более глубокое исследование этих двух объектов позволяет обнаруживать такое структурное сходство, которое является источником аналогии, ведущей к открытиям. Действительно, треугольник и тетраэдр — ограниченные выпуклые множества точек. Первое образовано минимальным числом прямых на плоскости, второе — минимальным числом плоскостей в пространстве. Отсюда, разумеется, не следует, что все свойства этих множеств точек одинаковы. Но если мы уже изучили свойства треугольника и приступаем к изучению свойств тетраэдра, то установленное «сходство» в одних свойствах дает нам право предполагать, что и некоторые другие свойства треугольника «переводятся» в свойства тетраэдра. Так, исходя из установленного сходства

и из того, что «в треугольнике биссектрисы углов пересекаются в одной точке и эта точка — центр вписанной окружности», мы приходим к предположению, что «в тетраэдре биссекторные плоскости двугранных углов пересекаются в одной точке и эта точка — центр вписанной сферы», и т. д. Мы открываем новые свойства тетраэдра, рассуждая по аналогии. Эти свойства, разумеется, подлежат доказательству, так как заключения по аналогии могут оказаться ложными.

5. Обобщение и абстрагирование

5.1. Обобщение и абстрагирование — два логических приема, применяемые почти всегда совместно в процессе познания.

Обобщение — это мысленное выделение, фиксирование каких-нибудь общих существенных свойств, принадлежащих только данному классу объектов или отношений. Абстрагирование — это мысленное отвлечение общих существенных свойств, выделенных в результате обобщения, от прочих несущественных для нашего изучения свойств рассматриваемых объектов или отношений и отбрасывание (в рамках нашего изучения) этих несущественных свойств.

Из этого краткого разъяснения видно, что абстрагирование не может осуществляться без обобщения, без выделения того общего, существенного, что подлежит абстрагированию.

Обобщение и абстрагирование неизменно применяются в процессе формирования понятий, при переходе от представлений к понятиям и вместе с индукцией как важное эвристическое средство.

5.2. Эмпирический материал, рассматриваемый с целью формирования нового понятия, должен подбираться таким образом, чтобы способствовать обобщению, выявлению существенных свойств, составляющих содержание формируемого понятия. Этот материал включает наряду с существенными для данного понятия (характеристическими) свойствами и несущественные. Чтобы способствовать выявлению существенных свойств (признаков) и их отделению в дальнейшем от несущественных, надо варьировать последние.

Выделение и абстрагирование общих и существенных свойств, характеризующих понятия, служат для математического описания (с помощью этих понятий) рассматриваемого эмпирического материала.

Однако сами выделяемые понятия остаются еще логиче-

ски неупорядоченными. Введением точных определений и основанной на них классификации понятий устанавливается связь между понятиями, конструируется их система.

5.3. Рассмотрим в качестве примера использование обобщения и абстрагирования для открытия индуктивным путем (в начальных классах) закона коммутативности сложения (натуральных чисел).

Эмпирическим материалом здесь служат непересекающиеся множества A и B конкретных предметов (карандашей и ручек или черных и красных палочек). Легко обнаруживается опытным путем, что $A \cup B = B \cup A$.

Варьируя число элементов этих множеств, получаем ряд конкретных равенств: $2+3=3+2$; $5+7=7+5$; $4+8=8+4$ и др. Эти равенства, с одной стороны, представляют собой математический материал, полученный из исходного эмпирического материала, с другой — сами составляют эмпирический материал, подвергаемый обобщению и абстрагированию с целью получения нового математического материала, который находится на более высоком уровне общности и абстракции.

Внимательно присматриваемся к приведенным равенствам с целью выявления содержащегося в них общего и отделения его от частного содержания этих равенств. Замечаем: в левой части каждого из этих равенств записана сумма двух чисел, в правой — сумма этих же чисел, но записанных в другом порядке. Как же сохранить только это общее, отвлекаясь от конкретных чисел, входящих в эти равенства? Если просто отбросить эти числа, мы получим форму с «пустыми местами»:

$$\ldots+\ldots=\ldots+\ldots,$$

которая не отражает выявленную общую закономерность, так как не отмечено, какие пустые места должны заполняться одинаковыми числами. Чтобы устранить этот недостаток полученной формы, изображают пустые места, которые должны заполняться одинаковыми числами, в виде пустых «окошек» одинаковой формы. В результате получаем

$$\square + \bigcirc = \bigcirc + \square.$$

В дальнейшем разъясняется, что в математике для большего удобства вместо пустых «окошек» различной формы применяются различные буквы и получается, например, $a + b = b + a$ или $x + y = y + x$. Эти буквы, играющие роль пустых мест, называются *переменными,* а числа, име-

на которых можно поставить вместо этих букв,— их *значениями.*

Как видно, обобщение и абстрагирование привело к открытию закона коммутативности сложения и одновременно к важнейшему языковому понятию переменной. С помощью обобщения и абстрагирования мы перешли от имен конкретных чисел к числовым переменным.

В дальнейшем предложения

$x + y = y + x$ для всяких $x, y \in N$;
$x \cdot y = y \cdot x$ для всяких $x, y \in Q$;
$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$ для всяких $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$;
$X \vee Y = Y \vee X$ для всяких $X, Y \in \{И, Л\}$ и др.,

выражающие коммутативность конкретных операций в конкретных множествах, в свою очередь служат эмпирическим материалом, который подвергается дальнейшему обобщению и абстрагированию с целью получения общего понятия коммутативной операции:

$$x * y = y * x \text{ для всех } x, y \in G.$$

В этом обобщении и абстрагировании мы переходим от конкретных имен операций $(+, \cdot, \vee)$ и множеств $(N, Q, V, \{И, Л\})$ к переменным для операций $(*)$ и для множества (G).

6. ЛОГИЧЕСКАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

1. Объем и содержание понятия

1.1. Каждое понятие объединяет множество объектов или отношений (*объем* этого понятия) и характеристическое свойство, присущее всем элементам этого множества и только им (*содержание* понятия). Например, понятие «треугольник» включает множество всевозможных треугольников (объем этого понятия) и характеристическое свойство — наличие трех сторон, трех вершин, трех углов (содержание понятия).

1.2. Содержание понятия раскрывается с помощью определения, объем — с помощью классификации. Посредством определения и классификации отдельные понятия организуются в систему взаимосвязанных понятий.

2. Определение

2.1. Рассмотрим некоторые способы определения понятия, которые находят (или должны находить) применение в школьном обучении математике.

Если в множестве A имеются элементы, обладающие некоторым свойством P, и элементы, не обладающие этим свойством, то свойство P определяет разбиение множества A на два класса (слово «класс» мы применяем в качестве синонима слова «множество», здесь — подмножества A):

$$B = \{x | x \in A \text{ и } P(x)\}; \overline{B} = \{x | x \in A \text{ и } \overline{P}(x)\},$$

где $P(x)$ означает «x обладает свойством P», а $\overline{P}(x)$ — «x обладает свойством не P (или «не обладает свойством P»)».

Это разбиение удовлетворяет всем условиям правильного разбиения множества на классы: каждый из классов не пуст ($B \neq \varnothing$ и $\overline{B} \neq \varnothing$), они непересекающиеся ($B \cap \overline{B} = \varnothing$) и исчерпывают множество A ($B \cup \overline{B} = A$).

С помощью свойства P мы определили множество B как подмножество множества A (в традиционной логике говорят, что определение задано указанием «рода (или родового понятия) A и видового признака (или отличия) P»).

Пусть, например, A — множество параллелограммов, P — свойство «иметь прямой угол». Тогда B — множество прямоугольников, и определение прямоугольника формулируется следующим образом: «Прямоугольник есть параллелограмм с прямым углом».

Мы уже говорили о том, что до введения определений учащиеся противопоставляют друг другу такие понятия, как «параллелограмм» и «прямоугольник», т. е. множества параллелограммов и прямоугольников представляются им как непересекающиеся (рис. 10, *а*). Определение этих понятий завершает процесс их формирования, раскрывая истинное отношение между множествами параллелограммов и прямоугольников (рис. 10, *б*).

Разумеется, не сразу приходят к такому определению прямоугольника. Показывая учащимся параллелограммы, среди которых и прямоугольники, и непрямоугольные параллелограммы, пользуясь определением параллелограмма, мы подводим их к обнаружению того, что прямоугольник обладает ха-

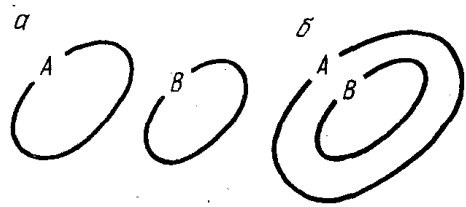


Рис. 10

рактеристическим свойством параллелограмма (противоположные стороны попарно параллельны) и, кроме того, у него «все углы прямые». Обычно ученики первоначально приходят к такому определению: прямоугольник — параллелограмм, у которого все углы прямые. Решение задачи — «в параллелограмме один угол прямой, найти остальные его углы» — приводит к усовершенствованию этого определения.

Встречается и определение прямоугольника, использующее понятие четырехугольника: прямоугольник — это четырехугольник, у которого все углы прямые. В таком случае приходится доказать теорему: «Прямоугольник — параллелограмм».

2.2. В процессе обучения целесообразно разъяснить учащимся сущность важнейших требований к определениям и некоторых широко распространенных ошибок в них.

Сравним два определения квадрата: 1) квадрат есть ромб с прямым углом; 2) квадрат есть параллелограмм с равными сторонами и прямым углом.

Для сравнения структуры этих определений удобно пользоваться их символической записью. Пусть A — множество параллелограммов, B — множество ромбов, C — множество квадратов, P_1 — свойство «иметь прямой угол», P_2 — свойство «иметь равные стороны». При этих обозначениях наши определения запишутся так:

1) $x \in C \underset{Df}{\Leftrightarrow} x \in B$ **и** $P_1(x)$ или $C \underset{Df}{=} \{x | x \in B$ **и** $P_1(x)\}$;

2) $x \in C \underset{Df}{\Leftrightarrow} x \in A$ **и** $P_1(x)$ **и** $P_2(x)$ или $C \underset{Df}{=} \{x | x \in A$ **и** $P_1(x)$ **и** $P_2(x)\}$.

Как видно, первое определение более краткое, так как в нем характеристическое свойство более простое по своей логической структуре $(P_1(x))$. Второе определение более громоздкое, так как в нем более сложное по своей структуре характеристическое свойство $(P_1(x)$ **и** $P_2(x))$. Это объясняется тем, что во втором не использовано определение ромба:

$$x \in B \Leftrightarrow x \in A \text{ и } P_2(x).$$

Если заменить во втором определении выражение «$x \in A$ **и** $P_2(x)$» через «$x \in B$», получим первое определение. Также легко заметить, что из второго определения можно получить еще одно краткое определение квадрата, если воспользоваться определением прямоугольника и заменить выражение

«$x \in A$ и $P_1(x)$» через «$x \in E$», где E — множество прямоугольников:

$$x \in C \underset{Df}{\Leftrightarrow} x \in E \text{ и } P_2(x)$$

(«квадрат есть прямоугольник с равными сторонами». Вообще можно несколько ослабить свойство P_2 — «с равными смежными сторонами»).

Как видно, наиболее простое краткое определение содержит наиболее простое (по своей структуре) характеристическое свойство. Это достигается тем, что определяемое множество выражается как подмножество *минимального* множества, т. е. такого, никакое другое подмножество которого, содержащее определяемое, ранее не определено (понятие, объем которого есть это минимальное множество, в традиционной логике называется *ближайшим (для определяемого) родовым понятием* или *ближайшим родом*).

Определение с помощью минимального множества мы также будем называть *минимальным*.

Мы должны стремиться в процессе обучения строить минимальные определения, которые считаются логически и методически безупречными (если, разумеется, они не страдают другими дефектами).

Если свойством P не обладает ни один элемент множества A, то определение множества B

$$x \in B \underset{Df}{\Leftrightarrow} x \in A \text{ и } P(x)$$

не задает ничего, кроме пустого множества (т. е. $B = \varnothing$). Такое определение называется *противоречивым*. Например, если мы определим «двупрямоугольный» треугольник как треугольник с двумя прямыми углами, то нетрудно доказать, что в множестве треугольников нет такого треугольника (конечно, на евклидовой плоскости) и это определение ничего не задает.

Поэтому в связи с определением (рассматриваемого типа) возникает и задача «доказательства существования». Эта задача состоит именно в доказательстве существования в множестве A элементов (хотя бы одного), обладающих свойством P, т. е. в доказательстве того, что определяемое множество $B = \{x | x \in A \text{ и } P(x)\}$ непусто. Например, определяя прямоугольный треугольник как треугольник с прямым углом, мы доказываем его существование непосредственным построением такого треугольника.

Рассмотрим некоторые типы ошибок в определениях, часто встречающихся в школьной практике.

1. Мы уже видели, что использование неминимального множества в качестве определяющего приводит к громоздкому, логически несовершенному определению. Это же получается в результате включения в определение логически зависимых свойств. Такие определения часто встречаются в ответах учащихся, особенно при повторении материала. Забывая, какие свойства включались в определение понятия, а какие доказывались уже на основании его, некоторые школьники вводят и те, и другие свойства в определение. Так, иногда учащиеся определяют параллелограмм как четырехугольник, у которого противоположные стороны параллельны и равны. Наглядная модель параллелограмма одновременно показывает эти два свойства, и так как учащиеся при традиционном преподавании сами не участвуют в логической организации свойств параллелограмма, а лишь заучивают систему свойств, то такие ошибки вполне объяснимы.

В приведенном примере допущена ошибка следующего типа: вместо определения $x \in B \Leftrightarrow x \in A$ **и** $P(x)$ дано определение $x \in B \overset{Df}{\Leftrightarrow} x \in A$ **и** $P(x)$ **и** $P_1(x)$, причем из $P(x)$ следует $P_1(x)$, т. е $P(x) \overset{Df}{\Rightarrow} P_1(x)$ истинна для любого x (на множестве четырехугольников).

Здесь нарушена минимальность определения (хотя и использовано минимальное определяющее множество).

Не только в ответах учащихся, но, к сожалению, и в некоторых учебниках встречаются определения, не удовлетворяющие требованию минимальности. Например, в учебнике А. П. Киселева имелось следующее определение прямой, перпендикулярной к плоскости: прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она, пересекаясь с этой плоскостью, образует прямой угол с каждой прямой, проведенной на плоскости через точку пересечения.

Во-первых, требование, чтобы прямая пересекала плоскость, является излишним, ибо это уже следует из того, что она перпендикулярна ко всем прямым плоскости (действительно, если прямая, перпендикулярная ко всем прямым на плоскости, не пересекала бы эту плоскость, то она должна была бы лежать в этой плоскости или быть ей параллельной. Но и в одном и в другом случаях на плоскости существовали бы прямые, параллельные данной, следовательно, неперпендикулярные ей, что противоречит условию). Во-вто-

рых, если ввести понятие угла двух скрещивающихся прямых раньше понятия перпендикуляра к плоскости, что и рекомендуется, можно в определении последнего опустить требование, чтобы прямые на плоскости проходили через основание перпендикуляра.

Таким образом, минимальным является следующее определение: прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна ко всем прямым этой плоскости.

2. Нередко учащиеся одно понятие определяют через другое, это второе — через первое, и в результате оба понятия остаются неопределенными. Например, иногда они определяют прямой угол не как один из равных смежных углов, а как угол с взаимно перпендикулярными сторонами. Если же спросить их, какие прямые называются взаимно перпендикулярными, они тут же отвечают: «Прямые, образующие прямые углы, называются взаимно перпендикулярными». В приведенном примере «круг» обнаруживается без затруднений и самими учащимися.

Имеются, однако, случаи, когда совершаемый «круг» оказывается более замаскированным. В качестве примера можно привести определение длины окружности. Обычно предварительно доказывают существование предела последовательности периметров правильных вписанных в окружность многоугольников, затем этот предел и принимается за длину окружности. Однако при доказательстве существования этого предела иногда учащиеся «обосновывают» ограниченность последовательности периметров, указывая в качестве верхней грани длину окружности. Таким образом, получается «круг»: длина окружности определяется с помощью предела, существование которого устанавливается с помощью длины окружности.

Эта ошибка объясняется смешением двух понятий: «окружности» (геометрический образ, давно известный учащимся) и «длины окружности» (число, которое только собираются определить). Этому смешению понятий способствует чертеж, который подсказывает учащимся указанную ошибку (пример отрицательной роли чертежа).

3. Иногда в определении встречается и «тавтология», состоящая в том, что объект определяется через самого себя, хотя и в других выражениях. Например, «подобными называются такие фигуры, которые между собой подобны». Ясно, что такое «определение» ничего не определяет.

4. Иногда в определении указывается не то определяющее множество, из которого выделяется определяемое под-

множество. Например, говорят: «Медиана есть прямая, соединяющая...» вместо «Медиана есть отрезок, соединяющий...»

5. В определениях, даваемых некоторыми учащимися, иногда совсем отсутствует определяющее понятие. Обычно в таких случаях оно заменяется словами «то», «если», «когда» и др. «Определения» такого рода встречаются там, где учащиеся не приучены давать полные ответы. На вопрос учителя: «Какие многоугольники называются подобными?» ученик ответил: «Это, если углы одного...»

Приведенные примеры ошибочных определений взяты из школьной практики. Серьезным недостатком преподавания является неправильная методика исправления ошибочных определений, даваемых учащимися. Часто на уроках наблюдается такая картина. Ученик дает ошибочное определение понятия. Учитель спрашивает второго, третьего учащегося, пока один из них не даст правильное определение. Если среди вызванных учеников такого не оказывается, учитель сам формулирует определение. При этом не выясняется, в чем сущность ошибок, допущенных учащимися в определениях, а следовательно, не предупреждается повторение подобных ошибок.

2.3. Рассмотренное (см. 2.2.) так называемое «формально-логическое» определение — не единственная форма определения, которая применяется в математике и в обучении математике.

Иногда используется *генетическое* определение, в котором вместо характеристического свойства указывается процесс образования определяемого объекта. Так, сферу можно определить: как замкнутую поверхность, все точки которой одинаково удалены от одной точки; как поверхность, образованную вращением полуокружности вокруг диаметра, стягивающего ее концы (по второму определению характеристическое свойство, включенное в первое определение, становится доказуемым (см. 2.2)).

2.4. В математике, особенно в современной, часто применяются *индуктивные* определения, которые, можно предполагать, получат широкое применение и в школьном обучении.

Схема индуктивного определения функции f на множестве N (или N_0) состоит в задании значения функции для 1 (или 0) и выражении значения функции для $x+1$ через ее значение для x с помощью известных операций (известной функции):

$\begin{cases} f(1) = a \text{ (или } f(0) = a, \text{ если функция } f \text{ определена на } N_0); \\ f(x+1) = \varphi(x, f(x)), \text{ где } \varphi \text{ — известная функция.} \end{cases}$

Эта схема — одна из форм задания алгоритма вычисления значения функции f для любого значения аргумента из N (или N_0).

Для последовательности 5, 7, 9, 11, 13, ... можно заметить (если закон образования членов этой последовательности остается таким же, как в выписанном конечном фрагменте ее):

$$f(1)=5;$$
$$f(x+1)=f(x)+2.$$

Отсюда легко получить и выражение для $f(x)$:

$$f(1)=5;$$
$$f(2)=f(1)+2;$$
$$f(3)=f(2)+2;$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$f(x+1)=f(x)+2.$$

Сложив левые и правые части этих равенств, получаем $f(x+1)=2x+5$, а следовательно, $f(x)=f(x+1)-2=2x+3$.

Индуктивное определение, естественно, отражает мыслительную деятельность в процессе поиска алгоритма. Рассматривая заданные члены последовательности, мы замечаем, что первый член равен 5 и что каждый следующий член на 2 больше предыдущего. Это и фиксируется в индуктивном определении.

По этой же схеме можно определить последовательности, представляющие собой функции натурального аргумента, сами принимающие значения из Z или Q. Например, последовательность $1, -\frac{1}{1\cdot 3}, \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}, \ldots$, определяется следующим образом (в предположении, что закономерность образования новых членов одна и та же):

$$\begin{cases} f(1) = 1; \\ f(n+1) = -f(n) : (n+2). \end{cases}$$

3. Классификация

3.1. Часто классификация состоит из последовательного, многоступенчатого разбиения множества на два класса с помощью некоторого свойства (двучленное деление или «дихотомия» в терминах традиционной логики).

В общем виде это выглядит так. Пусть имеем множество A и свойство P_1, причем существуют элементы A, обладающие и не обладающие этим свойством. Допустим, что

$$A_1 = \{x | x \in A \text{ и } P_1(x)\} \text{ и } \overline{A}_1 = \{x | x \in A \text{ и } \overline{P}_1(x)\}.$$

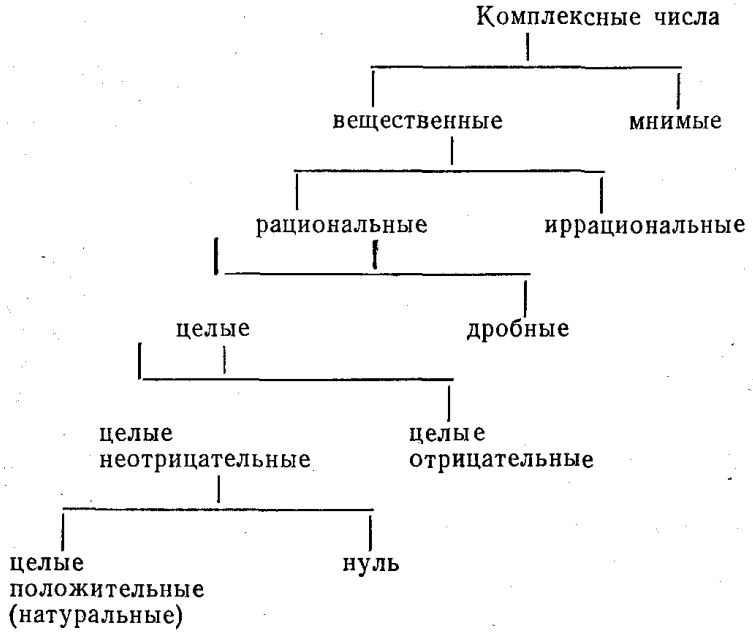
Тогда получаем разбиение множества A на два класса — A_1, $\overline{A}_1$ $(A_1 \cup \overline{A}_1 = A$ и $A_1 \cap \overline{A}_1 = \varnothing)$.

Дальше выделяются в A_1 два класса с помощью свойства P_2:

$$A_2 = \{x | x \in A_1 \text{ и } P_2(x)\} \text{ и } \overline{A}_2 = \{x | x \in A_1 \text{ и } \overline{P}_2(x)\},$$

т. е. определяется разбиение множества A_1 на два класса: A_2 и $\overline{A}_2$. Аналогично разбивается и A_2 на два класса: A_3 и $\overline{A}_3$ с помощью некоторого свойства P_3 и т. д. Эта последовательность разбиений заканчивается на каком-то A_n, дальнейшее разбиение которого уже не рассматривается.

Примером такой последовательности разбиений является следующая классификация чисел, отражающая (если читать ее снизу вверх) схему развития понятия числа:



Классификация многоугольников, многогранников, чисел, функций, алгебраических выражений по различным свойствам («основаниям деления») должна составляться

учащимися под руководством учителя, а не изучаться в готовом виде.

3.2. Понимание сущности разбиения множества на классы с помощью одного, двух и более свойств, способствует формированию и развитию умения классифицировать. Этому же способствуют специально подобранные задачи.

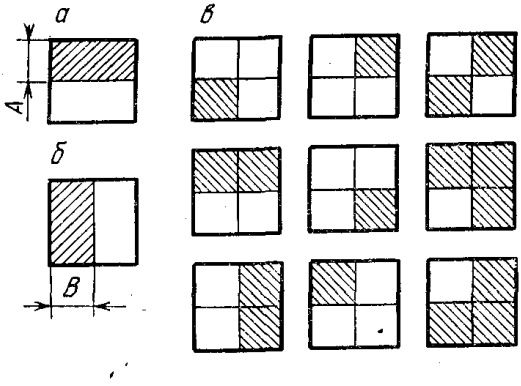


Рис. 11

Приведем такую задачу: рассмотрим множество треугольников как универсальное множество и изобразим его условно с помощью множества точек квадрата (это изображение можно истолковать так: квадрат — «склад», где хранятся все треугольники, условно изображенные в виде точек внутри этого «склада»).

С помощью свойства равнобедренности выделяем подмножество A треугольников, обладающих этим свойством (равнобедренных треугольников), и подмножество $\overline{A}$ треугольников, не обладающих им (разносторонних треугольников). Пусть подмножество A изображается заштрихованной половиной квадрата (рис. 11, *а*), в этой половине «склада» хранятся все равнобедренные треугольники.

С помощью свойства прямоугольности выделяем подмножество B треугольников, обладающих этим свойством (прямоугольных треугольников), и подмножество $\overline{B}$ треугольников, не обладающих им (непрямоугольных, т. е. остроугольных или тупоугольных треугольников)

Перед тем как выделить часть квадрата для изображения множества B, необходимо выяснить, имеют ли множества A и B общие элементы, т. е. существуют ли треугольники, которые являются одновременно и равнобедренными и прямоугольными (рис. 11, *б*).

Можно предложить учащимся ряд задач. Например, исходя из изображения множеств A и B (рис. 11, *а*, *б*), надо определить, какие подмножества треугольников представлены заштрихованными частями квадрата (рис. 11, *в*), и записать эти подмножества с помощью A, $\overline{A}$, B, $\overline{B}$, $\cap$ и $\cup$.

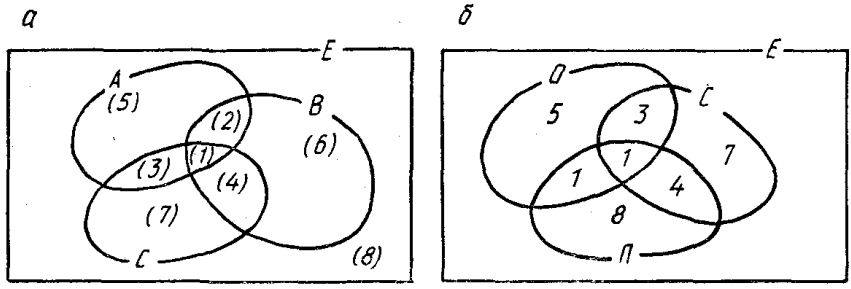


Рис. 12

Может быть предложена и обратная задача: изобразив множества A и B (рис. 11, *а*, *б*), необходимо определить множества $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $A \cup B$, $A \cup \overline{B}$, $\overline{A} \cup B$, $\overline{A} \cup \overline{B}$ и назвать их, пользуясь терминами «равнобедренный» и «прямоугольный».

Эти задачи могут решаться и в иной интерпретации. Например, в качестве универсального множества, изображенного с помощью множества точек квадрата, берут множество R вещественных чисел, в качестве подмножества A — множество Q рациональных чисел, а в качестве подмножества B — множество P положительных чисел.

Наглядное изображение разбиения множества с помощью трех свойств получается с помощью диаграммы Эйлера (рис. 12, *а*). Впервые Эйлер использовал круги для изображения множеств. Поэтому схему, в которой множества изображаются в виде кругов или в виде множеств внутренних точек простых (самонепересекающихся) плоских замкнутых линий (что более удобно в некоторых случаях), мы называем *диаграммой Эйлера* (в последнем случае схему называют и *диаграммой Венна*).

С помощью этой диаграммы решаются аналогичные задачи — определение класса, изображенного каждой из восьми занумерованных на диаграмме областей (разумеется, в конкретных случаях некоторые из этих классов могут оказаться пустыми), и обратная задача — определение области, изображающей каждый из восьми классов ($A \cap B \cap C$, $A \cap B \cap \overline{C}$, $A \cap \overline{B} \cap C$, $\overline{A} \cap B \cap C$, $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$, $\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$, $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$, $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$).

Приведенная диаграмма служит и для решения арифметических задач следующего типа: в классе 36 учащихся. Из них 10 являются отличниками, 15 — спортсменами, 14 — певцами (участниками хора), причем 4 являются отлични-

ками и спортсменами, 5 — спортсменами и певцами, 2 — отличниками и певцами, а 1 — отличником, спортсменом и певцом. Сколько учащихся класса не являются ни отличниками, ни спортсменами, ни певцами?

Задачи этого типа вызывают затруднения у учащихся, если решать их обычным арифметическим способом. При заполнении диаграммы Эйлера числом элементов, попадающих в ту или иную область, в соответствии с условиями задачи (рис. 12, *б*) сразу можно получить решение. С помощью диаграммы можно ответить и на целый ряд других вопросов: сколько учащихся являются *только* отличниками (отличниками, но не спортсменами и не певцами); сколько учащихся являются отличниками *или* спортсменами (отличниками, спортсменами *или* теми и другими); сколько учащихся являются или отличниками *или* спортсменами (только одно из двух)?

Решение подобных задач (в «качественном» и «количественном» вариантах) способствует развитию умения классифицировать.

4. Система понятий

4.1. Результатом обучения должно быть усвоение не только отдельных понятий, но и всей *системы* понятий каждой отдельной темы и математической дисциплины в целом. Этому способствует раскрытие связи между понятиями с помощью определения и классификации. Усвоение системы понятий является необходимым условием усвоения дедуктивной теории, составной частью которой она является.

Процесс формально-логического определения есть процесс сведения одного понятия ко второму, с более широким объемом, второго — к третьему, с еще более широким объемом, и т. д. Разумеется, этот процесс сведения не может быть бесконечным. Поэтому должны быть некоторые первоначальные понятия, которые неопределяемы через другие понятия данной системы именно потому, что они выбраны в качестве первоначальных: им не предшествуют никакие другие понятия этой системы.

В процессе обучения могут и должны создаваться такие педагогические ситуации, которые помогли бы учащимся открыть эту характерную особенность системы математических понятий, связанную с дедуктивным построением теории. Для этой цели следует использовать различный конкретный материал. Например, можно построить такую последовательность определений: 1) квадрат — ромб с пря-

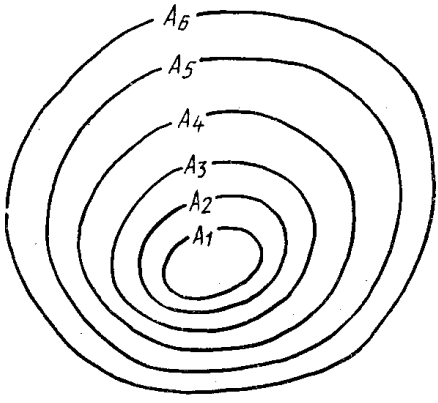


Рис. 13

мым углом (A_1); 2) ромб — параллелограмм с равными смежными сторонами (A_2); 3) параллелограмм — четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны (A_3); 4) четырехугольник — многоугольник с четырьмя сторонами (A_4); 5) многоугольник — фигура, ограниченная замкнутой ломаной линией (A_5); 6) фигура — множество точек (подмножество точек плоскости) (A_6).

Этот процесс сведения одних понятий к другим, наглядно изображенный на диаграмме Эйлера (рис. 13), доходит до понятий «множество» и «точка», которые принимаются за первоначальные и именно поэтому не определяются через другие понятия.

4.2. Итак, первоначальные понятия не определяются через другие понятия данной теории. Это, однако, не означает, что они никак не определяются. В математической теории, построенной как формальная аксиоматическая система, первоначальные понятия получают косвенное определение через аксиомы. В аксиомах выражаются основные свойства первоначальных понятий и отношений между ними, которыми пользуются при развертывании теории на базе этих аксиом. Но школьный курс ни на одном этапе обучения не строится как абстрактная формальная система вне всякой интерпретации. Математическая теория в школьном обучении строится как содержательная теория, т. е. в какой-то конкретной модели, и такое предложение, как «прямая линия имеет вид туго натянутой нити» предназначено для описания объекта модели, изображающего первоначальное понятие «прямая» (предложение «интерпретационного словаря», в котором непонятное выражение «прямая линия» объясняется с помощью знакомого физического объекта — «туго натянутой нити»). Это предложение, разумеется, не является математическим, так как оно содержит и другие термины, кроме собственно математических и логических. Оно не может быть ответом на вопрос «что называется прямой линией», и такой вопрос не должен задаваться, если понятие «прямая» принимается за первоначальное, так как вопрос, начинающийся со слов «что называ-

ется...», предполагает в качестве ответа определение понятия.

4.3. Один и тот же раздел школьного курса математики может строиться с помощью различных систем понятий, различающихся между собой порядком введения понятий или самими понятиями.

Выбор первоначальных понятий не определяет строго детерминированной последовательности изучения понятий системы. Система понятий оказывается лишь частично упорядоченной отношением «предшествования», понимаемым в смысле предшествования во времени в процессе обучения. Например, в традиционной системе понятий стереометрии такие понятия, как «угол скрещивающихся прямых» и «параллельность плоскостей» могут изучаться в любом порядке.

Возникает проблема определения педагогически целесообразного порядка введения понятий. Так, мы уже видели (см. 2.2.), что отсутствие понятия угла двух скрещивающихся прямых усложняет определение перпендикулярности прямой и плоскости. Введение же понятия угла двух скрещивающихся прямых в связи с изучением взаимного расположения двух прямых в начале курса значительно упрощает формулировки некоторых определений и теорем и позволяет их рассматривать в более общем виде.

7. ЛОГИЧЕСКАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

1. Индукция и дедукция

1.1. Индукция является важным эвристическим средством. С помощью дедукции мы доказываем предложения, сформулированные как гипотезы (предположения) в результате индукции.

Существенным различием между индукцией и дедукцией является характер заключения. Заключение по индукции, как известно, лишь правдоподобно («возможно истинно» при истинности посылок), заключение же по дедукции достоверно («необходимо истинно» при истинности посылок). Поэтому индукция в отличие от дедукции не может служить способом доказательства.

Исходя из этого различия и узкого понимания математики (дедуктивная теория), иногда недооценивают роль ин-

дукции и вообще правдоподобных рассуждений в математической деятельности, считая, что в ней совершенно исключительную роль играют лишь дедуктивные, «доказательные», рассуждения.

Однако в действительности дедукция неразрывно связана с индукцией. «Индукция и дедукция,— писал Энгельс,— связаны между собой столь же необходимым образом, как синтез и анализ. Вместо того чтобы односторонне превозносить одну из них до небес за счет другой, надо стараться применять каждую на своем месте, а этого можно добиться лишь в том случае, если не упускать из виду их связь между собой, их взаимное дополнение друг друга» (*Маркс К., Энгельс Ф.* Соч. 2-е изд., т. 20, с. 542—543).

Это верно и в области математики. Математическое мышление в широком смысле не сводится к доказательным рассуждениям, оно не состоит из одних формальных доказательств. Мыслительные процессы, включающие правдоподобные рассуждения и подсказывающие нам, ЧТО и КАК доказывать, составляют часть математического мышления, как и само формальное доказательство. Это особенно важно учесть в обучении математике. Учащиеся не в состоянии понять настоящую роль формального и строгого доказательств, если они не имеют определенного опыта таких «неформальных», содержательных рассуждений.

Известный французский математик Ж. Адамар, описывая роль дедуктивных (строгих) доказательств, говорил, что цель математической строгости — санкционировать и узаконить завоевания интуиции; кроме этой, математическая строгость не имела никогда другой цели.

Различные уровни мышления включают и различные уровни «строгости», различные структуры формальных выводов. Ученик должен научиться открывать, оценивать и критически анализировать доказательства на уровне, соответствующем его возможностям.

1.2. Дедукция, логический вывод, носит *формальный* характер, состоящий в том, что в наших рассуждениях, доказательствах одни предложения выводятся из других в силу определенной связи между их формой, структурой, независимо от конкретного содержания этих предложений.

Рассуждения совершенно различного содержания, применяемые в различных областях науки и повседневной жизни, могут иметь одну и ту же форму. Например, рассуждения: а) «квадрат — ромб, ромб — параллелограмм, следовательно, квадрат — параллелограмм»; б) «натуральное число — целое, целое число — рациональное, следовательно,

натуральное число — рациональное»; в) «дуб — дерево, дерево — растение, следовательно, дуб — растение»,— столь различные по содержанию, как нетрудно заметить, имеют одну и ту же форму (структуру), которую на языке алгебры множеств (логики классов) можно записать в виде следующей схемы (правила вывода):

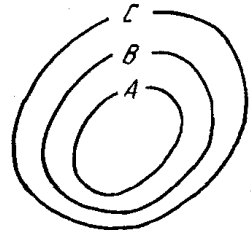


Рис. 14

$$\frac{A \subseteq B,\ B \subseteq C}{A \subseteq C} \qquad (1)$$

(«из посылок $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$ выводится заключение $A \subseteq C$»).

В рассуждениях «а» — «в» и во всевозможных конкретных рассуждениях любого содержания, построенных по схеме (1), правильность вывода (истинность заключения при истинности посылок) определяется не содержанием рассуждения, а формой посылок и заключения и обосновывается свойством транзитивности отношения включения, что наглядно изображается диаграммой Эйлера (рис. 14).

По существу рассуждение «а» представляет собой «доказательство» предложения «квадрат — параллелограмм» (если мы определяем квадрат как ромб с прямым углом). Это доказательство можно записать в виде последовательности из трех предложений: 1) квадрат — ромб (по определению); 2) ромб — параллелограмм (по определению); 3) квадрат — параллелограмм (из предложений 1 и 2 по правилу вывода (1)).

Хотя в поисках доказательства мы обычно руководствуемся содержательными представлениями (о тех объектах, свойство которых доказывается), само доказательство носит формальный характер, так как в нем используется (обычно в неявном виде) правило вывода, учитывающее лишь форму посылок и заключения. Доказательство предложения «натуральное число — рациональное» (рассуждение «б») имеет такую же форму (структуру), что и доказательство предложения «квадрат — параллелограмм».

1.3. Имеется большое многообразие дедуктивных рассуждений — правил вывода («дедуктивных умозаключений» в терминах традиционной логики), используемых (неявно) в математических доказательствах.

Назовем несколько широко применяемых правил вывода:

$\dfrac{X \Rightarrow Y,\ X}{Y}$ — правило заключения;

$\dfrac{X \Rightarrow Y,\ \overline{Y}}{\overline{X}}$ — правило отрицания;

$\dfrac{X \Rightarrow Y}{\overline{Y} \Rightarrow \overline{X}}$ — правило контрапозиции;

$\dfrac{X \wedge Y \Rightarrow Z}{X \wedge \overline{Z} \Rightarrow \overline{Y}}$ — правило расширенной контрапозиции;

$\dfrac{X \Rightarrow Y,\ Y \Rightarrow Z}{X \Rightarrow Z}$ — правило силлогизма.

Эти правила вывода записаны на языке алгебры высказываний. Широко применяются и некоторые другие правила вывода, легко выражаемые на языке алгебры множеств (или логики предикатов):

$\dfrac{A \subseteq B,\ B \cap C = \varnothing}{A \cap C = \varnothing}$ (все A суть B; ни одно B не есть C; следовательно, ни одно A не есть C);

$\dfrac{A \cap \overline{B} \neq \varnothing \vee C \subseteq B}{A \cap \overline{C} \neq \varnothing}$ (некоторые A не суть B; все C суть B; следовательно, некоторые A не суть C),

а также другие так называемые «модусы категорического силлогизма» в терминах традиционной логики.

Перечисленные и некоторые другие правила вывода составляют в совокупности логику математических доказательств, остающуюся неявной, нефиксированной в обычно строящихся сокращенных содержательных доказательствах. По-видимому, эта логика математических доказательств не может быть обязательным предметом изучения, но должна включаться в курс углубленного изучения математики или в программу факультативных занятий.

2. Доказательства математических предложений

2.1. Перед тем как чему-то учить, следует хорошо разобраться в сущности того, чему мы хотим учить, т. е. предмета изучения. Перед тем как рассмотреть педагогическую задачу обучения доказательству, надо выяснить сущность самого понятия «доказательство».

Разумеется, речь идет здесь не о метаматематическом исследовании понятия доказательства (выходящем за рам-

ки предмета педагогики математики), а лишь о кратком описании современной научной трактовки этого понятия.

Это необходимо для того, чтобы яснее представить себе: 1) насколько «школьные доказательства» далеки от строгих (в современном понимании) доказательств; 2) насколько вредны традиционно создаваемые иллюзии строгости там, где в действительности имеется пестрая смесь интуиции и логики; 3) насколько полезнее открыто заявлять учащимся, что мы принимаем какое-то предложение без доказательства (хотя оно доказуемо), чем давать несостоятельное, к тому же непонятное доказательство, выдавая его за строгое; 4) как строить методику обучения доказательству.

2.2. В строгом смысле о доказательстве можно говорить лишь в рамках какой-нибудь формальной аксиоматической системы. В форме такой системы математическая теория (арифметика, евклидова геометрия, теория групп и т. д.) строится примерно следующим образом: за основу берется определенная логическая система (например, логика предикатов с равенством), которая дополняется исходными понятиями математической теории — индивидуальными предметами и предикатами. Специфика их описывается определенными предложениями, совокупность которых составляет систему собственных аксиом теории. Эти аксиомы выражаются на принятом логическом языке формулами, которые не являются общезначимыми. Они истинны лишь для определенного класса предметных областей, которые обладают общей структурой, описываемой данной теорией, и присоединяются к общезначимым формулам базисной логической системы для вывода (доказательства) теорем теории.

Строящаяся таким образом дедуктивная система включает наряду с системой специфических аксиом развиваемой теории и систему логических аксиом и исходных правил вывода, определяющих логический язык этой теории.

Таким образом, современный аксиоматический метод предполагает более высокую ступень формализации. Если в догильбертовский период формализации подлежали лишь основные свойства специфических отношений объектов, изучаемых данной теорией, то теперь формализации подлежат и средства, с помощью которых из одних свойств этих отношений, составляющих содержание аксиом, выводятся другие свойства, составляющие содержание теорем этой теории. Раньше, когда говорили, что все предложения аксиоматической теории выводятся из нескольких исходных (аксиом) «чисто логическим путем», не знали, каков точный смысл этого выражения, его считали интуитивно ясным. Теперь

выражение «чисто логическим путем» для каждой дедуктивной системы получает точный смысл.

Под *доказательством* в такой теории понимают такую конечную последовательность (A_1, A_2, ..., A_n) предложений теории, что каждое предложение либо аксиома, либо получено из предшествующих предложений этой последовательности по какому-нибудь (из принятых в базисной логической системе) правилу вывода.

Если существует хотя бы одна такая последовательность предложений, оканчивающаяся предложением T, то T — *теорема* или *выводимое предложение* теории. С этой точки зрения каждая аксиома теории есть теорема, доказательство которой состоит из одной этой аксиомы.

Следует отметить, что современный аксиоматический метод и связанный с ним эталон строгости в математике основаны на идеях и методах, разработанных за последние сто лет в математической логике и теории множеств.

3. Обучение доказательству

3.1. Под обучением доказательству мы понимаем обучение мыслительным процессам поиска, нахождения и построения доказательства, а не обучение воспроизведению и заучиванию готовых доказательств. В таком понимании — это педагогическая задача первостепенного общеобразовательного и воспитательного значения, выходящего за рамки математического образования. Учить доказывать означает прежде всего учить рассуждать, а это — одна из основных задач обучения вообще.

При обучении доказательству необходимо учесть следующее: 1) школьный курс ни на одном этапе обучения не строится как формальная дедуктивная система и всегда остается в рамках содержательной модели; 2) в школьных доказательствах неизбежны интуитивные элементы; 3) понимание потребности в логическом доказательстве лучше достигается на нетривиальных примерах.

3.2. Поиск доказательства направляется исходя из трех основных вопросов: ЧТО; ОТКУДА; КАК?

а) ЧТО? — что доказывается; каково «доказываемое» предложение, для которого мы ищем доказательство; как оно формулируется; все ли понятно в этой формулировке; нельзя ли иначе формулировать доказываемое предложение; что «дано»; что «требуется доказать»?

Это далеко не полный перечень вопросов, которые мы объединили в одном вопросе «ЧТО?». Они связаны с изу-

чением доказываемого предложения, с приведением его к более удобной для выяснения условий и заключения форме. Например, представление доказываемых предложений в виде импликаций облегчает учащимся выявление того, что «дано» и что «требуется доказать». Так, расчленение теоремы «вертикальные углы равны» на условие и заключение вызывает большие затруднения, которые немедленно устраняются, если это предложение сформулировать в виде импликации: «если углы вертикальные, то они равны».

Необходимо выяснять *все условия* теоремы. Так, мы не сможем доказать, что среднее арифметическое двух чисел больше их среднего геометрического, если не учтем, что это верно лишь для двух положительных и неравных между собой чисел. Это подчеркивается в следующей записи теоремы в виде импликации:

$$a>0 \text{ и } b>0 \text{ и } a\neq b \Rightarrow \frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}.$$

б) ОТКУДА? — откуда, из каких посылок *следует* доказываемое предложение; из каких уже известных предложений данной области (аксиом, определений, ранее уже доказанных теорем) можно «вывести» это предложение?

Поиск ответа на этот вопрос можно вести исходя из самого доказываемого предложения или из уже известных предложений данной области, т. е. в определенном смысле противоположными путями. Эти два пути поиска доказательства в традиционной методике неудачно названы «анализом» и «синтезом».

Если применить термин «анализ» в обычном смысле, то под анализом доказательства надо понимать расчленение уже имеющегося доказательства на составные элементы, шаги, выяснение его логической структуры (что, несомненно, является весьма полезным упражнением). Под синтезом доказательства надо понимать обратную задачу конструирования доказательства из отдельных его элементов.

Здесь же речь идет о двух методах поиска доказательства: от доказываемого предложения к тем предложениям (аксиомам, определениям, ранее доказанным теоремам), из которых оно выводится (этот метод естественно назвать «движением назад»), и от уже установленных предложений данной области к новому, доказываемому («движение вперед»).

Метод «движения вперед» связан с большими трудностями и не может обеспечить обучение самостоятельным поискам доказательства. Действительно, как догадаться, с ка-

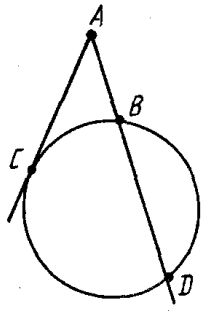


Рис. 15

ких аксиом, определений или ранее доказанных теорем надо начинать доказательство? Как догадаться, из каких предложений следует доказываемое? Этой догадке способствует метод «движения назад».

Проиллюстрируем оба метода на двух примерах (геометрическом и алгебраическом).

Пример 1. Рассмотрим известную теорему: если через точку вне окружности провести секущую и касательную, то произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной.

Часто в практике обучения просто воспроизводят готовое доказательство: соединяют точки B и C, C и D (рис. 15), рассматривают треугольники ABC и ACD, устанавливают их подобие, откуда следует пропорциональность сходственных сторон $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC}$, а из этой пропорции следует доказываемое равенство: $AD \cdot AB = AC^2$.

Но как мы догадались, что надо начинать с рассмотрения двух треугольников, которых, кстати, не было на исходном чертеже? Это следует просто заучить, запомнить. Но разве можно запомнить начала доказательств всех изучаемых теорем? И нужно ли это делать, если наша цель учить самостоятельно доказывать, рассуждать?

Привлечение учащихся к такому «движению вперед» представляет собой лишь квазиактивный метод, не решающий проблему обучения открытию доказательства.

Метод «движения назад» в нашем примере осуществляется примерно следующим образом. Нам надо доказать равенство $AB \cdot AD = AC^2$. Из ранее известного непосредственно такое равенство получить как будто нельзя. Нельзя ли это равенство несколько преобразовать? Его можно представить в виде пропорции

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC},$$

а пропорциональность отрезков мы получаем из подобия треугольников, в которых эти отрезки являются сходственными сторонами. Какие же треугольники надо образовать? Это видно из самой пропорции. Пусть члены первого отношения (AC, AD) будут сторонами одного треугольника, а члены второго отношения (AB, AC) — сторонами другого

треугольника. Следовательно, нужно образовать треугольники ACD и ABC, т. е. соединить точки (C, D) и (B, C) (к этому же придем, если допустим, что предыдущие члены отношений — стороны одного треугольника, а последующие — стороны другого).

Теперь ясно, с чего начинать, почему надо рассмотреть треугольники ACD и ABC и установить их подобие.

В описанном процессе поиска доказательства использован один из эвристических принципов, известный под названием принципа *парадигмы*. Он состоит в том, что доказываемое предложение (выражение) можно представить в различных (эквивалентных) формах с целью найти такую форму, которая включает эвристическую информацию, подсказывающую перспективное направление поиска. В нашем примере такой формой доказываемого равенства $AD \cdot AB = AC^2$ явилась как раз пропорция $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC}$, подсказывающая необходимость рассмотрения подобных треугольников.

Далее мы рассмотрим доказательство как нестандартную задачу и опишем один из возможных алгоритмов поиска в рамках общего подхода к решению задач, состоящего в сведении данной задачи к совокупности подзадач.

Пример 2. Рассмотрим приведенное выше (см. 3.2) предложение

$$a > 0 \text{ и } b > 0 \text{ и } a \neq b \Rightarrow \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}.$$

Доказать эту теорему означает установить, что заключение $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ следует из условия $a > 0$ и $b > 0$ и $a \neq b$ и других ранее уже установленных предложений.

Методом «движения вперед» мы начинаем с предложения $(a \neq b) \Rightarrow (a-b)^2 > 0$. Затем прибавляем к обеим частям неравенства $(a-b)^2 > 0$ выражение $4ab$ и получаем $(a+b)^2 > 4ab$ или $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > ab$. Используя другие условия $a > 0$ и $b > 0$, извлекаем корень квадратный из обеих частей неравенства и приходим к доказываемому неравенству $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$.

Но как догадаться, что следует начинать с неравенства $(a-b)^2 > 0$? Метод «движения назад» приводит нас к этой догадке.

Действительно, нам надо доказать, что $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ при

условии, что $a>0$ и $b>0$ и $a\neq b$. Но истинны следующие импликации: $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}\Rightarrow(a+b)^2>4ab$; $(a+b)^2>4ab\Rightarrow$ $\Rightarrow(a-b)^2>0$, причем последнее неравенство $(a-b)^2>0$ тождественно истинно при $a\neq b$.

Итак, из транзитивности отношения следования получаем, что истинно

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}\Rightarrow(a-b)^2>0.$$

Отсюда, однако, еще не следует истинность обратной импликации

$$(a-b)^2>0\Rightarrow\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$$

(можно легко установить, что она не является тождественно истинной. Достаточно взять два отрицательных неравных значения a и b, и импликация ложна. Но в ней не учтено еще условие $a>0$ и $b>0$).

Во всяком случае мы пришли к догадке, что следует исходить из неравенства $(a-b)^2>0$ и, используя условия, искать доказательство теоремы. По существу после применения метода «движения назад» мы должны использовать метод «движения вперед». Из рассмотрения примеров приходим к выводу о целесообразности сочетания двух методов поиска доказательства, причем предпочтение следует отдать методу «движения назад».

в) КАК? — как доказываемое предложение получается из ранее установленных предложений данной теории?

Этот вопрос находит в традиционном обучении очень простой ответ: с помощью рассуждения. Однако можно предполагать (и некоторые эксперименты подтверждают это), что по этому вопросу можно подняться в школьном обучении на более высокий уровень.

Выделим в обучении доказательствам два основных уровня. На первом уровне (неполная средняя школа) используемые в доказательствах правила вывода остаются невыясненными, они применяются в неявном виде, основное внимание уделяется выяснению того, «что доказывается» и «из чего это следует», но не «как это следует». На данном уровне доказательство рассматривается вообще как рассуждение (в интуитивном понимании), с помощью которого истинность доказываемого предложения устанавливается на основе истинности ранее уже установленных предложений. Традиционное преподавание не поднимается выше этого уровня.

На втором уровне (старшие классы) может быть несколько уточнено понятие доказательства, если учащимся разъяснены простейшие правила вывода. В данном случае ученикам становится доступным анализ доказательства, выявление его логической структуры, используемых в нем правил вывода. Второй уровень достижим, по-видимому, лишь в классах с углубленным изучением математики или на факультативных занятиях.

Уточнение понятия доказательства может быть достигнуто с помощью представления доказательства в определенной стандартной форме, поддающейся точному описанию.

В проведенном нами эксперименте было достигнуто следующее уточнение (приближающееся, как нетрудно заметить, к современной трактовке понятия доказательства (см. 2.1)).

Под *доказательством* теоремы T будем понимать конечную последовательность предложений $(A_1, A_2, ..., A_n)$, принадлежащих данной теории, которая удовлетворяет двум условиям: а) каждое предложение этой последовательности представляет собой или аксиому, или определение, или ранее уже доказанную теорему, или допущение (условие доказываемой теоремы) или же получается из предшествующих предложений по одному из (допустимых) правил вывода; б) последнее предложение этой последовательности (A_n) есть предложение T.

Предложение T является теоремой, если для него может быть построено хотя бы одно доказательство, т. е. найдена хотя бы одна последовательность предложений, удовлетворяющая условиям «а» и «б».

В описанном представлении доказательства в виде конечной последовательности предложений участвуют «ранее доказанные теоремы». В доказательствах этих «ранее доказанных теорем», очевидно, участвуют «еще ранее доказанные теоремы», в доказательствах последних — «еще ранее, чем они, доказанные теоремы», и т. д. Этот процесс, разумеется, не может быть бесконечным. Некоторые предложения данной теории должны приниматься за исходные, невыводимые из других. Эти исходные предложения и называются *аксиомами* теории.

Аксиомы не доказываются вовсе не потому, что они «очевидны и не требуют доказательства». Есть не менее очевидные теоремы, которые, однако, доказываются. Например, в элементарной геометрии предложение «через две различные точки проходит не более одной прямой» обычно принимает-

ся за аксиому и не доказывается, а не менее очевидное предложение «две различные прямые имеют не более одной общей точки» уже является теоремой и доказывается.

Недоказуемость первого предложения не является свойством, присущим самому этому предложению, независимо от того, принимается оно за аксиому или нет. Это предложение недоказуемо именно потому, что оно принимается за аксиому (впрочем, можно принять за аксиому второе предложение, тогда первое предложение станет доказуемым, т. е. теоремой).

Приведенное стандартное представление доказательства в виде конечной последовательности предложений, удовлетворяющей условиям «а» и «б», не предназначено для того, чтобы им постоянно пользовались в практике доказательства. Оно является важным средством анализа доказательства, помогает раскрывать некоторые ошибки, часто допускаемые в доказательствах, которые связаны с использованием ранее еще не доказанных теорем или «недопустимых» правил вывода.

В качестве примера представления доказательства в *описанной стандартной форме приведем доказательство* уже рассмотренного предложения:

$$a>0 \text{ и } b>0 \text{ и } a\neq b \Rightarrow \frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}.$$

Доказательство запишем в два столбца (в левом — само доказательство в виде конечной последовательности предложений, в правом — анализ доказательства, т. е. обоснование правомерности участия каждого предложения в доказательстве):

Доказательство	*Анализ доказательства*
1) $a>0$ и $b>0$ и $a\neq b$;	1) допущение;
2) $a\neq b$;	2) 1, УК;
3) $a\neq b \Rightarrow (a-b)^2>0$;	3) р. д. т.;
4) $(a-b)^2>0 \Rightarrow (a+b^2)>4ab$;	4) р. д. т.;
5) $a\neq b \Rightarrow (a+b)^2>4ab$;	5) 3, 4, ПС;
6) $(a+b)^2>4ab$;	6) 2, 5, ПЗ;
7) $a>0$ и $b>0$;	7) 1, УК;
8) $(a+b)^2>4ab$ и $a>0$ и $b>0$;	8) 6, 7, ВК;
9) $(a+b)^2>4ab$ и $a>0$ и $b>0 \Rightarrow \frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$;	9) р. д. т.;
10) $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$.	10) 8, 9, ПЗ;

11) $a>0$ и $b>0$ и $a\neq b \Rightarrow \dfrac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$. 11) 1, 10, ПД.

Здесь 1, УК — «из предложения 1 по правилу удаления конъюнкции $\dfrac{X \text{ и } Y}{X}$; р. д. т. — ранее доказанная теорема; ПС — правило силлогизма; ПЗ — правило заключения; ВК — правило введения конъюнкции $\dfrac{X,\ Y}{X \text{ и } Y}$; ПД — принцип дедукции: если из допущения X выводимо Y, то доказуемо $X \Rightarrow Y$.

Разумеется, обычное доказательство этой теоремы, как и доказательства других теорем, выглядит короче за счет того, что не все шаги доказательства осуществляются в явном виде и правила вывода остаются невыясненными. Такое расчленение доказательства на «элементарные шаги» может рассматриваться лишь на факультативных занятиях.

Приведем пример «косвенного доказательства», известного в школьной практике под названием способа от противного. Рассмотрим один из многочисленных вариантов косвенного доказательства, в котором в качестве допущения принимают отрицание доказываемого предложения и ведут доказательство до получения противоречия. Затем говорят, что «полученное противоречие доказывает теорему».

Выражение «противоречие доказывает теорему» можно разъяснить следующим образом: так как противоречие (ложное заключение) получено в результате применения допустимых правил вывода (правильных рассуждений), хотя бы одна из посылок должна быть ложной. Но ни аксиомы, ни определения, ни ранее доказанные теоремы не могут быть ложными, следовательно, ложным должно быть допущение, т. е. отрицание доказываемого предложения. Если же отрицание доказываемого предложения ложно, то само это предложение истинно, т. е. теорема доказана.

Рассмотрим доказательство предложения, обратного теореме Пифагора: «Если квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон, то этот треугольник прямоугольный (угол, лежащий против первой стороны, прямой)».

Это предложение можно записать следующим образом:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \angle C = 90^\circ$$

(так как предложение сформулировано в виде импликации, то его отрицание эквивалентно конъюнкции $c^2 = a^2 + b^2$ и $\angle C \neq 90^\circ$, которая и является допущением косвенного доказательства):

Доказательство	*Анализ доказательства*
1) $c^2 = a^2 + b^2$ и $\angle C \neq 90°$;	1) допущение косвенного доказательства;
2) $c^2 = a^2 + b^2$;	2) 1, УК;
3) $\angle C \neq 90°$;	3) 1, УК;
4) $\angle C \neq 90° \Rightarrow \angle C < 90°$ или $\angle C > 90°$;	4) аксиома;
5) $\angle C < 90°$ или $\angle C > 90°$;	5) 3, 4, ПЗ;
6) $\angle C < 90° \Rightarrow c^2 \neq a^2 + b^2$;	6) р. д. т.;
7) $\angle C > 90° \Rightarrow c^2 \neq a^2 + b^2$;	7) р. д. т.;
8) $\angle C < 90°$ или $\angle C > 90° \Rightarrow c^2 \neq a^2 + b^2$;	8) 6, 7, ВД;
9) $c^2 \neq a^2 + b^2$;	9) 5, 8, ПЗ;
10) Противоречие 2 и 9 доказывает теорему. Здесь ВД — введение дизъюнкции.	

4. Локальная логическая организация

4.1. Можно различать два аспекта логической организации математического материала: 1) внутри какой-нибудь небольшой темы — локальная логическая организация; 2) в масштабах целой теории — глобальная логическая организация.

Эти два аспекта мыслительной деятельности по существу отличаются лишь по масштабам, но не по структуре: первый представляет собой построение «маленькой» теории, второй — построение «большой» теории.

В средних классах школы основное внимание должно уделяться первому из этих аспектов, т. е. логической организации в малом. Это подготовит учащихся к пониманию в старших классах процесса аксиоматизации теории в целом. В традиционном преподавании ни один из этих аспектов мыслительной деятельности не является предметом изучения, и этим объясняются трудности, связанные с применением аксиоматического метода в школьном обучении.

Рассмотрим на конкретном примере обучение локальной логической организации математического материала.

4.2. Поставим задачу, используя наблюдение и опыт (измерения), описать то, что изображено на рис. 16. Важно, чтобы учащиеся могли выразить (записать) с помощью *математических предложений* то, что они *видят* на чертеже (этому тоже необходимо учить).

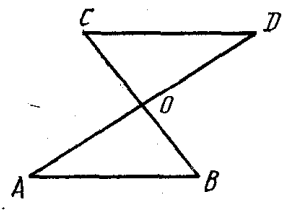


Рис. 16

На рис. 16 изображены *точки* (A, B, C, D, O), *отрезки* (AB, BC, AD, AO, ...), *углы* (OAB, ABC, BCD, ...), *тре-*

угольники (AOB и COD). Эти объекты находятся в определенных отношениях. Под управлением (и с помощью) учителя учащиеся выписывают некоторые из этих отношений:

p_1: отрезки AD и BC пересекаются в точке O;
p_2: $BO=OC$;
p_3: $AO=OD$;
p_4: $AB=CD$;
p_5: $\triangle AOB=\triangle COD$;
p_6: $\angle ABC=\angle BCD$;
p_7: $\angle ABC$ и $\angle BCD$ — накрест лежащие при прямых AB и CD и секущей BC;
p_8: $CD \| AB$.

В результате описания рассматриваемого объекта (см. рис. 16) мы получили множество предложений: $P=\{p_1, p_2, \ldots, p_8\}$.

Однако приведенное математическое описание эмпирического материала несовершенно. Это лишь «математический материал», а не теория. Естественно возникает проблема: надо ли истинность всех этих предложений устанавливать опытным путем (не говоря о правомерности опыта в качестве способа установления истинности в математике; этот вопрос должен специально обсуждаться в процессе обучения); нельзя ли максимально сократить опыт и из некоторых (возможно минимального числа) предложений, установленных опытным путем, вывести логически все остальные.

Эта проблема возникает и в самой математике при построении теории, описывающей какой-нибудь новый класс структур. Возникновение и постановка этой проблемы в процессе обучения в связи с построением «маленькой теории» свидетельствует о том, что реализация описываемой модели обучения приближает процесс и методы обучения математике к процессу и методам исследования в самой математике.

Для решения сформулированной проблемы необходимо исследовать логические связи между предложениями из множества P. Возникает потребность в «логическом эксперименте», состоящем в исследовании различных возможностей логической организации (упорядочения с помощью отношения следования) совокупности предложений P, придании ему некоторой логической структуры. Иными словами, эту совокупность надо превратить в «маленькую теорию» внутри изучаемой геометрии (используя при этом некоторые из ранее уже известных предложений геометрии).

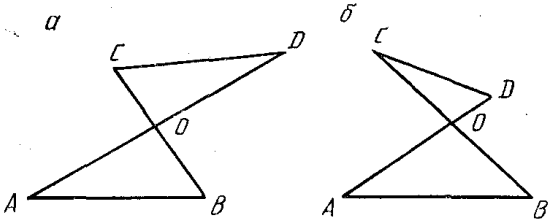


Рис. 17

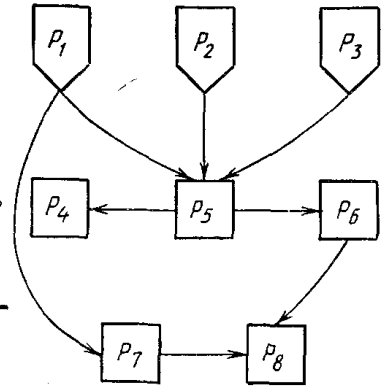


Рис. 18

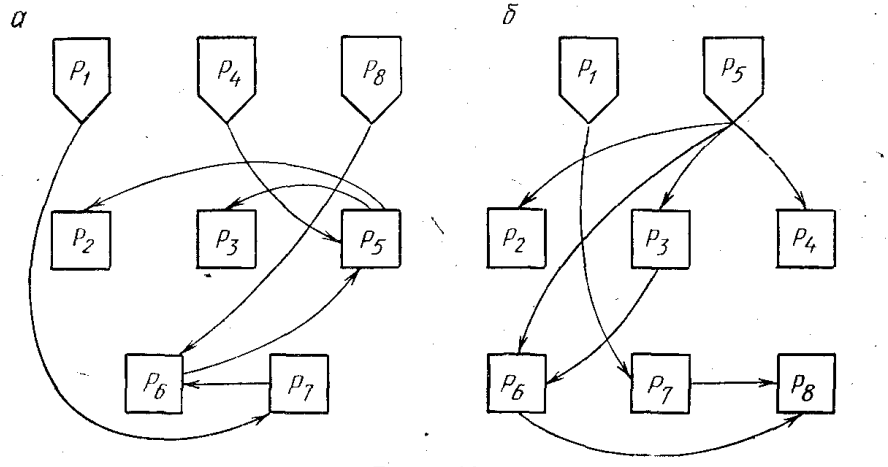


Рис. 19

Исследование можно начать методом проб. Если взять в качестве исходного, например, одно предложение p_1, то уже p_2 не следует из p_1. Действительно, построим модель (фигуру), в которой p_1 истинно, а p_2 ложно (рис. 17, *а*). Такой контрпример способствует достижению правильного понимания следования (p_2 не следует из p_1, если можно указать модель, в которой p_1 истинно, а p_2 ложно). Так как p_2 не следует из p_1, возьмем в качестве исходных оба предложения. Однако из p_1 и p_2 не следует p_3. Модель, в которой p_1 и p_2 истинны, а p_3 ложно, изображена на рис. 17, *б*. Теперь естественно взять в качестве исходных p_1, p_2, p_3.

Попытка построить модель, в которой эти три предложения истинны, а p_4 или какое-нибудь из последующих предложений ложно, не увенчалась успехом. В таком случае

имеет смысл попробовать вывести все остальные предложения из первых трех, принятых за исходные («локальных аксиом»). Это удается, и в результате мы получаем структуру, изображенную на рис. 18.

Естественно возникает вопрос, нельзя ли какие-нибудь другие предложения из множества P принять за исходные. В результате поиска устанавливается, например, что такими системами исходных предложений (посылок) могут служить (p_1, p_4, p_8), (p_1, p_5). Соответствующие структуры (маленькие теории) изображены на рис. 19.

Исчерпывающее исследование всевозможных вариантов логической организации множества P предложений — интересная тема для внеклассных занятий.

Дополним теперь фигуру, изображенную на рис. 16, отрезком AC (рис. 20), а множество P следующими предложениями:

p_9: $\angle BAC$ и $\angle ACD$ — внутренние односторонние углы при прямых AB и CD и секущей AC;

p_{10}: $\angle BAC + \angle ACD = 180°$;

p_{11}: $\angle BAC + \angle ABC + \angle BCA = 180°$.

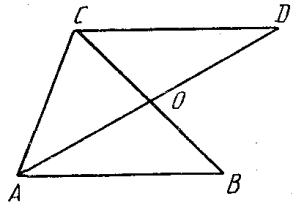


Рис. 20

Получаем расширенное множество предложений $P_1 = \{p_1, p_2, \ldots, p_{11}\}$, включающее P. Принимая одну из возможных структур $(P, \Rightarrow)$, расширяем ее до $(P_1, \Rightarrow)$. Так, продолжив структуру, изображенную на рис. 18, получаем для P_1 структуру, приведенную на рис. 21.

Нетрудно заметить, что здесь (если исключить p_4) изображена по существу структурная схема приведенного в учебнике А. В. Погорелова «Геометрия 6—10» (М., 1982) доказательства теоремы о сумме углов треугольника. Действительно, если взять произвольный треугольник ABC, соединить вершину A с серединой O стороны BC и продолжить AO до точки D так, чтобы $AO = OD$, то получим фигуру, изображенную на рис. 20. Все предложения из множе-

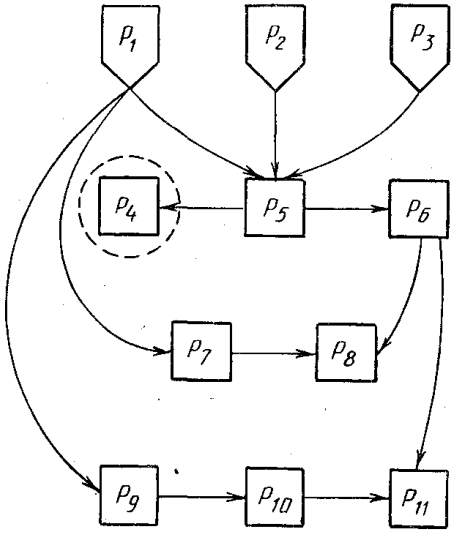


Рис. 21

ства P_1, за исключением p_4, участвуют в доказательстве предложения p_{11} (сумма углов треугольника ABC равна 180°).

Совершенно очевидно, что описанный нами метод обучения, использующий приемы МЭМ и ЛОММ, подготавливает учащихся к сложному доказательству с помощью исследования, в котором они сами участвуют и в процессе которого они проводят (разумеется, не без помощи учителя) это доказательство. Сформулировав теперь последнее предложение p_{11} в виде теоремы, учащиеся в состоянии построить (а по существу восстановить) его доказательство.

Очевидно преимущество этого активного метода обучения по сравнению с традиционным, состоящим в том, что учитель сам все доказывает. Учащиеся достигают понимания материала, если в процессе обучения они принимают активное участие в построении доказательств, локальных математических теорий.

Дополним теперь фигуру, изображенную на рис. 20, отрезком BD (рис. 22), а множество P_1 следующими предложениями:

p_{12}: $\triangle AOC = \triangle BOD$;
p_{13}: $\angle ACO = \angle OBD$;
p_{14}: $\angle ACO$ и $\angle OBD$ — накрест лежащие при прямых AC и BD и секущей BC;
p_{15}: $AC \| BD$;
p_{16}: $AC = BD$.

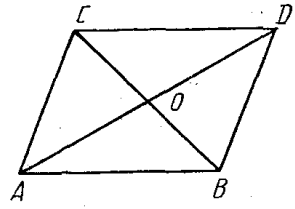


Рис. 22

Получаем множество предложений $P_2 = \{p_1, p_2, \ldots, p_{16}\}$, включающее P_1. Если дополнить структуру $(P_1, \Rightarrow)$, изображенную на рис. 21, до $(P_2, \Rightarrow)$, то получим новую структуру (рис. 23). Если исключить из нее p_{11}, то найдем одну из возможных теорий параллелограмма, в которой исходными являются свойства диагоналей, т. е. параллелограмм здесь определяется как четырехугольник, у которого диагонали, пересекаясь, делятся в точке пересечения пополам.

Если исходить из структуры, изображенной на рис. 19, *а*, то возможен другой вариант теории, согласно которой параллелограмм определяется как четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

Естественно, можно получить и другие варианты теории параллелограмма. К тому же, мы не указали все предложения, которые выводятся в каждом из вариантов этой теории или служат исходными (например, $\angle ABD = \angle ACD$ и др.).

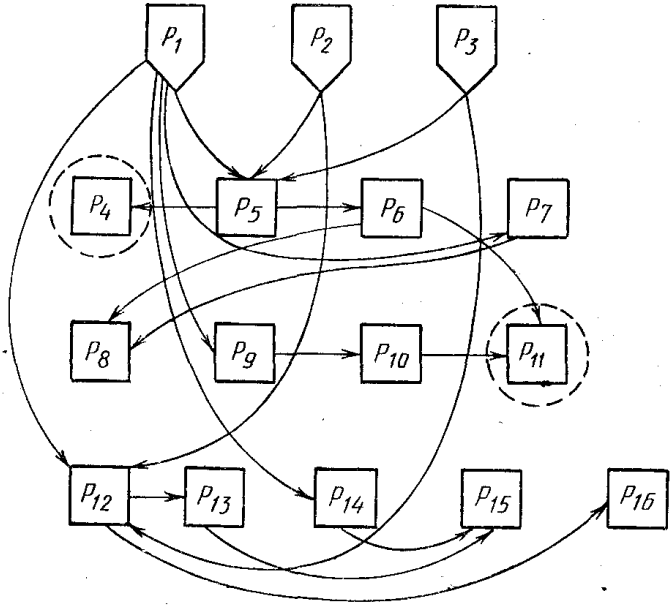


Рис. 23

Исчерпывающее исследование всевозможных построений теории параллелограмма может проводиться на внеклассных занятиях.

4.3. Приведенные примеры иллюстрируют два аспекта математической деятельности (МЭМ и ЛОММ) применительно к обучению геометрии. В общем виде их можно представить следующим образом.

В результате описания эмпирического материала на геометрическом языке путем наблюдения, опыта, измерений мы получаем некоторое конечное множество геометрических предложений, а именно: $P=\{p_1, p_2, ..., p_n\}$. Это множество предложений логически неупорядочено и не включено в систему геометрических предложений (аксиом, ранее уже доказанных теорем).

Возникает проблема: выделить из множества P возможно минимальное подмножество предложений A, такое, чтобы

$$\Gamma,\ A \Rightarrow p_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n,$$

где Γ — совокупность уже известных истинных геометрических предложений (аксиом, ранее доказанных теорем или предложений, истинных в силу определений), т. е. такое, чтобы из Γ и A следовали все остальные предложения из P (каждое предложение из A следует из A, это тривиально). Таким образом, множество предложений P с помощью отно-

шения следования превращается в структуру $(P, \Rightarrow)$ или систему предложений (в маленькую теорию), которая присоединяется к Γ. Варьируя A, т. е. систему исходных предложений, посылок или «локальных аксиом», мы получаем из одного и того же множества предложений P различные «маленькие теории».

Подобным методом расширение теоретических знаний учащихся осуществляется присоединением к уже изученному фрагменту Γ теории не отдельной теоремы, сформулированной и доказанной учителем, а «маленькой теории», в построении которой учащиеся приняли активное участие.

Последовательное расширение теоретических знаний выглядит так:

$$\Gamma \cup (P, \Rightarrow) = \Gamma_1, \quad (\Gamma \subset \Gamma_1);$$
$$\Gamma_1 \cup (P_1, \Rightarrow) = \Gamma_2, \quad (\Gamma_1 \subset \Gamma_2);$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Естественно возникает вопрос, рекомендуется ли проводить такое исследование, применять такой метод обучения по каждой «маленькой теме». Ответ, конечно, будет отрицательный. Описанный метод, как и всякий другой метод обучения, не может считаться универсальным.

Этот метод применим при изучении лишь отдельных тем и готовит учащихся к тому, чтобы на изложение других тем в школьном учебнике смотреть как на результат подобной деятельности. Такой взгляд на изложенную, уже построенную теорию способствует ее сознательному усвоению.

8. ЛОГИЧЕСКАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА. АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД

1. Постановка проблемы

1.1. Вопрос об отражении аксиоматического метода в школьном преподавании (и связанный с ним вопрос о логической строгости в обучении математике) уже давно является предметом дискуссии как у нас, так и за рубежом. Достаточно отметить, что этот вопрос обсуждался на I и II Всероссийских съездах преподавателей математики (1911, 1913) и включался МКМО в повестку дня Международных конгрессов математиков.

Не касаясь истории обсуждения проблемы аксиоматиче-

ского метода в обучении математике, хотя она представляет несомненный интерес, отметим лишь, что так же, как в науке, в школьном обучении эта проблема касалась только геометрии.

В силу устаревших традиций геометрия выдвигается на первый план, когда рассматривается проблема развития логики мышления учащихся в процессе обучения математике. Только в последнее время (20—25 лет) исследуется применение аксиоматического метода в обучении математике, а не только в геометрии.

Хотя в ходе длительной дискуссии выдвигались многочисленные предложения по обсуждаемой проблеме, все они могут быть с точностью до некоторых деталей сведены к трем основным предложениям: 1) сделать систематический курс аксиоматическим, четко отделив его от пропедевтического, характеризуемого широким использованием опыта и основанной на нем интуиции; 2) ни на каком этапе обучения не отделять логику от интуиции, а правильно сочетать их на разных ступенях обучения; 3) построить в аксиоматическом стиле лишь небольшой фрагмент теории в старших классах, чтобы на этом материале знакомить учащихся с современным аксиоматическим методом, а весь курс строить так, как предлагается в п. 2.

Следует отметить, что первое из этих предложений находит наименьшее число сторонников, последнее — наибольшее.

1.2. Изучение проблемы аксиоматического метода в обучении математике приводит к выводу о целесообразности ее расчленения на две следующие проблемы.

1. Аксиоматический метод как способ построения школьного курса (включая выяснение целесообразного логического уровня на каждом этапе обучения, чтобы этот уровень, с одной стороны, был доступен учащимся, с другой — способствовал более быстрому развитию их логического мышления).

2. Аксиоматический метод как предмет изучения (включая выбор конкретного материала, на котором возможно ознакомление учащихся старших классов с современным аксиоматическим методом, и разработку методики такого ознакомления).

Первая проблема предполагает исследование возможности аксиоматического построения школьного курса математики (не только геометрии) на отдельных этапах обучения, вторая проблема — исследование возможности изучения самого аксиоматического метода на конкретном и подходя-

щем для этой цели материале в определенном методическом аспекте, учитывающем уровень мыслительной деятельности учащихся и цели обучения.

2. Аксиоматический метод как способ построения школьного курса

2.1. Учащиеся лучше всего обучаются на собственном опыте, исследуя различные конкретные ситуации. Мы можем подвести их к математическому описанию таких ситуаций, т. е. к созданию математических моделей конкретных ситуаций, а затем изучать структуры этих моделей. Таким образом создается база для последующей аксиоматической систематизации.

Однако очевидно, что ни на каком этапе обучения весь курс математики или какой-нибудь большой его раздел не может быть построен как абстрактная формальная система, т. е. вне всякой содержательной интерпретации.

В школьном обучении может быть осуществлена лишь *содержательная* аксиоматика. При таком понимании аксиомы и выводимые из них теоремы рассматриваются как содержательные (имеющие реальный смысл) высказывания об объектах теории, а сам логический вывод предполагается интуитивно понятным.

По существу такое понимание аксиоматического метода свойственно догильбертовому периоду его развития. В многочисленных попытках аксиоматического построения геометрии теория строилась как описание некоторой конкретной системы объектов, аксиомы понимались как «очевидные» предложения об этих объектах, и задача аксиоматизации сводилась к дедукции всех предложений теории из исходных (аксиом).

С работами Гильберта связан переход от содержательного к формальному пониманию аксиоматической теории. Гильберт в своем труде «Основания геометрии» начинает аксиоматическое построение геометрии словами: «Мы мыслим три различные системы вещей; вещи первой системы мы называем точками и обозначаем A, B, C, ...; вещи второй системы мы называем прямыми и обозначаем a, b, c, ...; вещи третьей системы мы называем плоскостями и обозначаем α, β, γ, ...» (М., 1948, с. 56).

В множестве всех этих вещей вводятся некоторые отношения, обозначаемые словами «принадлежит», «между», «конгруэнтно» и др. В развертывании теории, описывающей структуру данного множества вещей (точек, прямых, пло-

скостей) с введенными в нем отношениями, совершенно не затрагивается не только «природа» вещей, но и «смысл» отношений между ними; используются лишь некоторые формальные свойства этих отношений, составляющие содержание геометрических аксиом. Этим интуиция полностью исключается. Она исключается и из дедукции, так как дальнейшее развитие аксиоматического метода привело к распространению формализации и аксиоматизации на логику, средствами которой строится аксиоматическая теория.

Таким образом, вообще можно выделить три уровня аксиоматизации теории: 1) содержательная аксиоматическая теория, описывающая одну конкретную структуру (множество объектов определенной природы с введенными в нем отношениями определенного смысла), в развертывании которой используется интуитивная логика; 2) полуформальная аксиоматическая теория, описывающая род структур (объекты и отношения уже могут иметь различные истолкования), в развертывании которой, как в содержательной теории, используется интуитивная логика; 3) формальная аксиоматическая теория, строящаяся на базе определенной, в свою очередь аксиоматизированной логической системы. По существу полуформальная аксиоматическая теория в историческом развитии аксиоматического метода представляла собой промежуточный этап перехода от содержательной к формальной аксиоматической теории.

2.2. Исходя из приведенного весьма краткого описания современного аксиоматического метода, легко заметить, что он не может служить способом построения школьного курса (ни на каком этапе обучения).

Что же следует понимать под «отражением» («применением») аксиоматического метода в построении школьного курса?

В современном аксиоматическом методе выделяют две стороны: 1) абстрагирование теории от конкретных моделей; 2) дедуктивное построение теории вне всякой интерпретации, на базе какой-нибудь системы аксиом.

В школьном обучении может быть осуществлено дедуктивное развитие теории, но не в абстрактной форме, а в определенной конкретной модели (как содержательная теория). Иными словами, отражается лишь одна сторона аксиоматического метода, связанная с логической организацией математического материала. Но и она не может быть осуществлена «в чистом виде».

Мы приходим к выводу о реальности предложений 2 и 3 (см. 1.1) в части, касающейся использования аксиоматического метода как способа построения школьного курса (см. 1.2).

3. Аксиоматический метод как предмет изучения

3.1. Прежде всего возникает вопрос: надо ли изучать в школе аксиоматический метод. Так как этот метод широко применяется в математике, то желательно на некоторой стадии обучения ознакомить с ним учащихся (при углубленном изучении математики; на факультативных занятиях). Это положительно влияет на развитие математического мышления, способствует пониманию сущности и значения абстрактного характера математических теорий, обеспечивающего возможность их применения в различных конкретных ситуациях.

Если мы признаем целесообразность ознакомления учащихся с аксиоматическим методом, то возникает вопрос, на каком этапе обучения, на каком конкретном материале, на каком уровне и в каком аспекте возможно его изучение.

Ознакомление с аксиоматическим методом предполагает наличие таких математических и логических знаний и навыков, которыми учащиеся могут овладеть лишь на сравнительно поздней стадии, по-видимому не ранее 14—15 лет. Поэтому подготовку к изучению аксиоматического метода следует начинать намного раньше, чем само это изучение.

Ознакомление с аксиоматическим методом возможно лишь на достаточно простых примерах предпочтительно полиморфных (допускающих различные неизоморфные модели) теорий при следующих условиях: 1) имеется много простых, привлекающих своей наглядностью моделей, иллюстрирующих абстрактную теорию; 2) результаты абстрактной теории индуктивно подсказываются изучением этих моделей; 3) при малом числе аксиом удается построить фрагмент теории с интересными теоремами; 4) доказательства достаточно просты и обозримы (легко выявляются используемые в них правила вывода).

Геометрия мало подходит для этой цели, хотя традиционно аксиоматический метод в обучении неизменно связывался именно с геометрией. В основе последней лежит громоздкая аксиоматика, и нет возможности привести примеры сколько-нибудь интересных конкретных моделей, отличных от классической модели, на которой строится в школе преподавание геометрии. Для выяснения некоторых

вопросов, связанных с аксиоматикой, может быть использована лишь «геометрия принадлежности» (плоскости или пространства).

Наиболее подходящими примерами теорий, удовлетворяющих условиям 1—4, являются теории коммутативной группы и булевой алгебры. Они отличаются простотой аксиоматики, обилием интересных конкретных моделей и простыми доказательствами первых теорем.

Исходя из нашей концепции активного обучения, под ознакомлением с аксиоматическим методом надо понимать ознакомление не с готовой, уже построенной аксиоматической теорией, а с самой процедурой аксиоматизации (аксиоматического построения) теории.

В этом направлении проводился педагогический эксперимент, подтвердивший целесообразность методики, предусматривающей: 1) рассмотрение конкретных моделей одной и той же структуры и обнаруживание одинаковых свойств; 2) абстрагирование этих свойств от конкретных моделей, принятие их за характеристику рода структур и общую формулировку этих свойств на логико-математическом языке; 3) логическую организацию полученной совокупности предложений, т. е. вывод одних предложений из других, принятых за исходные, с использованием простейших правил вывода (выделение системы аксиом или некоторых эквивалентных систем аксиом); 4) конкретизацию, т. е. реализацию построенной теории в новых конкретных ситуациях, построение новых, отличных от исходных моделей.

Эту методику можно проиллюстрировать конкретными примерами — аксиоматизацией теорий коммутативной группы и булевой алгебры.

3.2. Рассмотрим: а) множество Z целых чисел с введенной в нем операцией «$+$» обычного сложения — $[Z, +]$; б) множество Q^+ рациональных положительных чисел с введенной в нем операцией «$\cdot$» обычного умножения — $[Q^+, \cdot]$; в) множество V_0 вращений плоскости с центром в точке O с введенной в нем операцией «$\circ$» умножения (понимаемой в смысле последовательного применения — «$x \circ y = z$» означает, что вращение z — результат последовательного применения вращений y и x в указанном порядке) — $[V_0, \circ]$.

Хотя элементы данных множеств имеют различную природу (числа, вращения), а введенные в них операции — различный смысл, эти операции «снабжают» множества Z, Q^+ и V_0 однородными структурами, характеризуемыми одни-

Таблица 8.1

$[Z, +]$	$[Q^+, \cdot]$	$[V_0, \circ]$
1	2	3
1) Для любых $x, y \in Z$ существует $z \in Z$, такое, что $x + y = z$	1) Для любых $x, y \in Q^+$ существует $z \in Q^+$, такое, что $x \times y = z$	1) Для любых $x, y \in V_0$ существует $z \in V_0$, такое, что $x \circ y = z$
(операция «+» осуществляет отображение $Z^2 \to Z$)	(операция «·» осуществляет отображение $Q^{+2} \to Q^+$)	(операция «∘» осуществляет отображение $V_0^2 \to V_0$)
2) Для любых $x, y, z \in Z$ $(x + y) + z = x + (y + z)$	2) Для любых $x, y, z \in Q^+$ $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$	2) Для любых $x, y, z \in V_0$ $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$
(сложение ассоциативно)	(умножение ассоциативно)	(умножение вращений ассоциативно)
3) Для любых $x, y \in Z$ $x + y = y + x$	3) Для любых $x, y \in Q^+$ $x \cdot y = y \cdot x$	3) Для любых $x, y \in V_0$ $x \circ y = y \circ x$
(сложение коммутативно)	(умножение коммутативно)	(умножение вращений коммутативно)
4) Существует число, обозначаемое через «0» $(0 \in Z)$, такое, что для любого $x \in Z$ $x + 0 = x$	4) Существует число, обозначаемое через «1» $(1 \in Q^+)$, такое, что для любого $x \in Q^+$ $x \cdot 1 = x$	4) Существует вращение, обозначаемое через v_0 $(v_0 \in V_0)$, такое, что для любого $x \in V_0$ $x \circ v_0 = x$
(0 — нейтральный элемент множества относительно сложения)	(1 — нейтральный элемент множества относительно умножения)	(v_0 — вращение на угол 0 (или 2π) — нейтральный элемент множества V_0 относительно умножения)
5) Для каждого $x \in Z$ существует противоположное ему число $-x \in Z$, такое, что $x + (-x) = 0$	5) Для каждого $x \in Q^+$ существует обратное ему число $x^{-1} \in Q^+$, такое, что $x \cdot x^{-1} = 1$	5) Для каждого вращения $x \in V_0$ существует обратное ему вращение $x^{-1} \in V_0$, такое, что $x \circ x^{-1} = v_0$ (если x — вращение на угол α, то x^{-1} — вращение на угол $-\alpha$)
6) Для всяких $x, z \in Z$ существует $y \in Z$, такое, что $x + y = z$	6) Для всяких $x, z \in Q^+$ существует $y \in Q^+$, такое, что $x \cdot y = z$	6) Для всяких $x, z \in V_0$ существует $y \in V_0$, такое, что $x \circ y = z$
7) Для всяких $x, y, z \in Z$, если $x = y$, то $x + z = y + z$	7) Для всяких $x, y, z \in Q^+$, если $x = y$, то $x \cdot z = y \cdot z$	7) Для всяких $x, y, z \in V_0$, если $x = y$, то $x \circ z = y \circ z$
8) Для всяких $x, y, z \in Z$, если $x + z = y + z$, то $x = y$	8) Для всяких $x, y, z \in Q^+$, если $x \cdot z = y \cdot z$, то $x = y$	8) Для всяких $x, y, z \in V_0$, если $x \circ z = y \circ z$, то $x = y$

Окончание табл. 8.1

1	2	3
9) Для всяких $x, y \in Z$, если $x = y$, то $-x = -y$	9) Для всяких $x, y \in Q^+$, если $x = y$, то $x^{-1} = y^{-1}$	9) Для всяких $x, y \in V_0$, если $x = y$, то $x^{-1} = y^{-1}$
10) Для всякого $x \in Z$ $-(-x) = x$	10) Для всякого $x \in Q^+$ $(x^{-1})^{-1} = x$	10) Для всякого $x \in V_0$ $(x^{-1})^{-1} = x$
11) Для всяких $x, y \in Z$, если $-x = -y$, то $x = y$	11) Для всяких $x, y \in Q^+$, если $x^{-1} = y^{-1}$, то $x = y$	11) Для всяких $x, y \in V_0$, если $x^{-1} = y^{-1}$, то $x = y$
12) Для всяких $x, y \in Z$ $-(x + y) = (-x) + (-y)$	12) Для всяких $x, y \in Q^+$ $(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$	12) Для всяких $x, y \in V_0$ $(x \circ y)^{-1} = x^{-1} \circ y^{-1}$

ми и теми же (с точностью до названия элементов и операций) свойствами.

Характеристика известных свойств $[Z, +]$, $[Q^+, \cdot]$, $[V_0, \circ]$ дана в табл. 8.1.

Не будем продолжать выписывание одинаковых свойств операции «+», «·» «∘» в множествах Z, Q^+, V_0 соответственно. Впрочем, некоторые другие свойства уже выводимы из выписанных. Более того, и сами предложения 1—12 не являются независимыми, некоторые из них выводимы из других.

Возникает задача логической организации совокупности предложений 1—12.

Ввиду того что операции «+», «·», «∘» определяют соответственно в множествах Z, Q^+, V_0 однотипные структуры *(коммутативную группу)*, нет смысла заниматься логической организацией совокупности предложений 1—12 в каждом из трех конкретных случаев: $[Z, +]$, $[Q^+, \cdot]$, $[V_0, \circ]$. Естественно, отвлекаясь от конкретной природы элементов множеств (Z, Q^+, V_0) и от конкретного смысла введенных в них операций («+», «·», «∘»), можно рассматривать абстрактную структуру коммутативной группы, характеризуемую соответствующим образом сформулированными предложениями 1—12, и исследовать логические связи между этими предложениями с целью выделения исходных (аксиом) таким образом, чтобы из них можно было вывести все остальные.

Построение такой абстрактной аксиоматической теории приводит к существенной «экономии»: один раз доказанная в ней теорема уже не нуждается в доказательстве в любой конкретной ее модели, в которой мы можем пользоваться ею как истинным высказыванием.

Чтобы отвлечься от конкретной природы элементов множеств Z, Q^+, V_0, мы рассматриваем множество G объектов произвольной (неопределенной) природы. В множестве G выделяем элемент e (абстракция от 0,1 и v_0) и вводим операцию, которую обозначаем каким-нибудь знаком, например $*$ (и называем операцией «звездочка»). Буквами a, b, c, ..., x, y, z обозначаем переменные для элементов из G.

Ставится следующая задача: сформулировать (на логико-математическом языке) предложения 1—12 применительно к структуре $[G, *]$ так, чтобы $[Z, +]$, $[Q^+, \cdot]$, $[V_0, \circ]$ были ее конкретными моделями.

Получаем следующие записи предложений 1—12:

$$\forall x \forall y \exists z (x * y = z); \tag{1}$$

$$\forall x \forall y \forall z ((x * y) * z = x * (y * z)); \tag{2}$$

$$\forall x \forall y (x * y = y * x); \tag{3}$$

$$\forall x (x * e = x); \tag{4}$$

$$\forall x \exists x' (x * x' = e); \tag{5}$$

$$\forall x \forall z \exists y (x * y = z); \tag{6}$$

$$\forall x \forall y \forall z (x = y \Rightarrow x * z = y * z); \tag{7}$$

$$\forall x \forall y \forall z (x * z = y * z \Rightarrow x = y); \tag{8}$$

$$\forall x \forall y (x = y \Rightarrow x' = y'); \tag{9}$$

$$\forall x ((x')' = x); \tag{10}$$

$$\forall x \forall y (x' = y' \Rightarrow x = y); \tag{11}$$

$$\forall x \forall y ((x * y)' = x' * y'). \tag{12}$$

Возникает задача, установить истинность некоторых из этих высказываний, исходя из истинности других (из этого же перечня), т. е. уменьшить число предложений, принимаемых за исходные (аксиомы). Сложность данной задачи не позволяет ее решить в школьном курсе исчерпывающим образом, выявляя всевозможные варианты логической организации совокупности предложений 1—12. Однако можно показать, что из предложений 1—5 следуют все остальные, т. е. предложения 1—5 составляют одну из возможных систем аксиом, характеризующих структуру коммутативной группы. Можно также показать, что если к предложениям 1, 2, 3 присоединить в качестве новой аксиомы предложение 6, то предложения 4 и 5 становятся доказуемыми. Таким образом, предложения 1, 2, 3, 6 также составляют одну из возможных систем аксиом коммутативной группы.

После построения фрагмента абстрактной теории коммутативной группы переходят к рассмотрению некоторых конечных моделей.

а) Возьмем множество $A_2=\{0, 1\}$. Всего подстановок множества A_2 (отображений множества A_2 на себя) две:

$$f_1=\begin{bmatrix}0\to 0\\1\to 1\end{bmatrix};\quad f_2=\begin{bmatrix}0\to 1\\1\to 0\end{bmatrix}.$$

В множестве $\Pi(A_2)=\{f_1, f_2\}$ подстановок множества A_2 введем операцию умножения (суперпозиции, последовательного применения отображений), для которой легко составить таблицу:

$\circ$	f_1	f_2
f_1	f_1	f_2
f_2	f_2	f_1

Нетрудно заметить, что $[\Pi(A_2), \circ]$ — коммутативная группа (легко проверить выполнимость аксиом (1) — (5)).

б) Возьмем множество, состоящее из трех элементов:

$$A_3=\{1, 2, 3\}.$$

Всего подстановок этого множества 3!, т. е. 6.

Рассмотрим множество $\Pi(A_3)$ подстановок множества A_3:

$$\Pi(A_3)=\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\},$$

где $f_1=\begin{bmatrix}1\to 1\\2\to 2\\3\to 3\end{bmatrix};\quad f_2=\begin{bmatrix}1\to 2\\2\to 3\\3\to 1\end{bmatrix};\quad f_3=\begin{bmatrix}1\to 3\\2\to 1\\3\to 2\end{bmatrix};$

$$f_4=\begin{bmatrix}1\to 1\\2\to 3\\3\to 2\end{bmatrix};\quad f_5=\begin{bmatrix}1\to 3\\2\to 2\\3\to 1\end{bmatrix};\quad f_6=\begin{bmatrix}1\to 2\\2\to 1\\3\to 3\end{bmatrix}.$$

Учащимся может быть предложена задача — составить таблицу суперпозиций в множестве $\Pi(A_3)$:

1	2	3	4	5	6	7
$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_3	f_1	f_6	f_4	f_5
f_3	f_3	f_1	f_2	f_5	f_6	f_4

1	2	3	4	5	6	7
f_4	f_4	f_5	f_6	f_1	f_2	f_3
f_5	f_5	f_6	f_4	f_3	f_1	f_2
f_6	f_6	f_4	f_5	f_2	f_3	f_1

и выяснить свойства структуры $[\Pi(A_3), \circ]$.

Используя полученную таблицу, приходим к выводу, что в $[\Pi(A_3), \circ]$ выполняются аксиомы (1), (2), (4), (5) и не выполняется аксиома (3). Таким образом, $[\Pi(A_3), \circ]$ — некоммутативная группа. Если отделить от таблицы ее верхний левый угол, соответствующий множеству $\{f_1, f_2, f_3\}$:

$\circ$	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	f_2	f_3
f_2	f_2	f_3	f_1
f_3	f_3	f_1	f_2

то можно заметить, что $[\{f_1, f_2, f_3\}, \circ]$ образует коммутативную группу (удовлетворяет аксиомам (1) — (5)). Говорят также, что $[\{f_1, f_2, f_3\}, \circ]$ — коммутативная подгруппа группы $[\Pi(A_3), \circ]$.

Целесообразно показать учащимся интересную геометрическую модель некоммутативной группы $[\Pi(A_3), \circ]$ и ее коммутативной подгруппы.

Пусть *1, 2, 3* — вершины правильного треугольника (рис. 24). Тогда элементы $\Pi(A_3)$, т. е. $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$, интерпретируются как преобразования плоскости, переводящие вершины этого треугольника в вершины этого же треугольника, т. е. как преобразования, приводящие треугольник *123* к самосовмещению. Таким образом, получаем: f_1 — поворот плоскости вокруг центра *0* треугольника на угол 2π — переводит вершину *1* в *1*, *2* в *2*, *3* в *3* или оставляет каждую вершину на месте; f_2 — поворот плоскости вокруг центра *0* треугольника на угол $2\pi/3$ — переводит вершину *1* в *2*, *2* в *3*, *3* в *1*; f_3 — поворот плоскости вокруг центра *0* треугольника на угол $4\pi/3$ — переводит вершину *1* в *3*, *2* в *1*, *3* в *2*; f_4 — симметрия плоскости относительно оси *01* (проходящей через центр *0* треугольника и вершину *1*) — переводит вершину *1* в *1*, *2* в

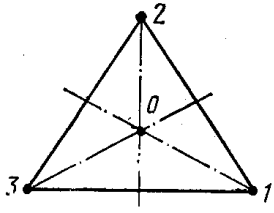


Рис. 24

3, *3* в *2*; f_5 — симметрия плоскости относительно оси *02* — переводит вершину *1* в *3*, *2* в *2*, *3* в *1*; f_6 — симметрия плоскости относительно оси *03* — переводит вершину *1* в *2*, *2* в *1*, *3* в *3*.

Других перемещений плоскости, приводящих треугольник *123* к совмещению с самим собой, нет. Как видно, множество всех таких перемещений плоскости образует некоммутативную группу, а подмножество трех поворотов $\{f_1, f_2, f_3\}$ — коммутативную подгруппу (относительно умножения перемещений). Следует также отметить, что $[\{f_1, f_2, f_3\}, \circ]$ — подгруппа $[V_0, \circ]$.

В качестве полезного упражнения целесообразно предложить учащимся выделить из $[V_0, \circ]$ подгруппу вращений плоскости, оставляющих инвариантным квадрат, правильный шестиугольник.

3.3. Булева алгебра хорошо подходит для аксиоматического рассмотрения, так как ее аксиомы (и теоремы) применимы и к алгебре множеств, и к алгебре высказываний, и к теории электрических цепей. Все эти модели булевой алгебры в содержательном описании вполне доступны учащимся 13—15 лет. Процедура аксиоматизации булевой алгебры может рассматриваться лишь после того, как учащиеся ознакомятся с этими моделями.

Абстрактную булеву алгебру можно определить как множество M элементов неопределенной природы с двумя выделенными элементами e_1 и e_2 и двумя операциями, которые условно назовем «сложением» ($\oplus$) и «умножением» ($\odot$), удовлетворяющими следующим аксиомам:

$$\forall x \forall y \ (x \oplus y = y \oplus x); \tag{1}$$

$$\forall x \forall y \ (x \odot y = y \odot x) \tag{2}$$

(обе операции коммутативны);

$$\forall x \forall y \forall z \ (x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z)); \tag{3}$$

$$\forall x \forall y \forall z \ (x \oplus (y \odot z) = (x \oplus y) \odot (x \oplus z)) \tag{4}$$

(каждая из операций $\oplus$, $\odot$ дистрибутивна относительно другой);

$$\forall x \ (x \oplus e_1 = x); \tag{5}$$

$$\forall x \ (x \odot e_2 = x) \tag{6}$$

(e_1 — нейтральный элемент относительно $\oplus$, e_2 — нейтральный элемент относительно $\odot$);

$$\forall x \exists x' \ (x \oplus x' = e_2); \tag{7}$$

$$\forall x \ (x \odot x' = e_1). \tag{8}$$

Таблица 8.2

Алгебра			
абстрактная булева	множеств	высказываний	контактных схем
Элементы множества M	*Подмножества некоторого множества*	*Двузначные высказывания*	*Двухпозиционные контакты*
$\oplus$	Объединение ($\cup$)	Дизъюнкция ($\vee$)	Параллельное соединение (Ц)
$\odot$	Пересечение ($\cap$)	Конъюнкция ($\wedge$)	Последовательное соединение (П)
e_1	$\varnothing$	Л	0 — разомкнутый контакт
e_2	U (универсальное множество)	И	1 — замкнутый контакт
x'	$\overline{A}$ — дополнение множества A	$\overline{X}$ — отрицание высказывания X	$\overline{X}$ — контакт в другом положении, чем X

Система предложений 1—8 представляет собой одну из возможных систем аксиом булевой алгебры (операции «$\oplus$» и «$\odot$» также ассоциативны, но это свойство уже выводимо из приведенных аксиом (1)—(8)).

Целесообразно сопоставить булеву алгебру $[M, \oplus, \odot]$ с «обычной» алгеброй $[R, +, \cdot]$ для выявления различия между ними.

Переход от абстрактной булевой алгебры к ее конкретным моделям легко осуществляется с помощью табл. 8.2, в которой определяются значения всех символов.

Установление выполнимости аксиом (1)—(8) в каждой из трех конкретных алгебр $[Ч(U), \cup, \cap]$, $[\{И, Л\}, \vee, \wedge]$, $[\{0, 1\}, Ц, П]$ («$Ч(U)$» — множество частей множества U) не вызывает никаких затруднений.

Необходимо отметить известную «двойственность», наблюдающуюся в аксиомах (а следовательно, и в теоремах) булевой алгебры: если в какой-нибудь из аксиом (1)—(8) заменить символы $\oplus$, $\odot$, e_1, e_2 всюду, где они встречаются в ней, соответственно символами $\odot$, $\oplus$, e_2, e_1, то получим другую аксиому (из тех же (1)—(8)). Этот «принцип двойственности» весьма плодотворен: как только мы доказали какую-нибудь теорему булевой алгебры, двойственное ей предложение (получающееся из нее указанной выше заменой символов) также является теоремой, которая уже не нуждается в специальном доказательстве.

Например, докажем теорему $\forall x\,(x \oplus x = x)$.

Доказательство. 1. $(x \oplus x) \odot (x \oplus x') = x \oplus (x \odot x')$ (по (4));

2. $(x \oplus x) \odot e_2 = x \oplus e_1$ (по (7), (8));

3. $x \oplus x = x$ (по (6), (5)).

По принципу двойственности имеет место и теорема $\forall x (x \odot x = x)$. Доказательство двойственной теоремы получается из приведенного доказательства переводом по принципу двойственности предложений 1—3 с одновременной заменой аксиом, на которые мы ссылаемся, двойственными им аксиомами:

1. $(x \odot x) \oplus (x \odot x') = x \odot (x \oplus x')$ (по (3));
2. $(x \odot x) \oplus e_1 = x \odot e_2$ (по (8), (7));
3. $x \odot x = x$ (по (5), (6)).

Мы доказали свойство идемпотентности операций $\oplus$, $\odot$. Это свойство имеет место в каждой конкретной модели булевой алгебры ($A \cup A = A$, $A \cap A = A$, $X \vee X = X$, $X \wedge X = X$, $X \sqcup X = X$, $X \sqcap X = X$).

Хотя все три алгебры

$$[Ч(U),\ \cup,\ \cap], \tag{1}$$

$$[\{И,\ Л\},\ \vee,\ \wedge], \tag{2}$$

$$[\{1,\ 0,\},\ \sqcup,\ \sqcap] \tag{3}$$

являются моделями булевой алгебры, более глубокое «сходство» обнаруживается между алгеброй высказываний (2) и алгеброй контактных схем (3). Это объясняется тем, что множества {И, Л} и {1, 0} двухэлементные, в то время как множество $Ч(U)$ содержит вообще 2^n элементов, если U — n-элементное множество, или бесконечно, если U — бесконечное множество.

Так как алгебра высказываний и алгебра контактных схем — «двухэлементные» булевы алгебры, между ними можно установить взаимно однозначное соответствие

$$[\{И,\ Л\},\ \vee,\ \wedge] \rightleftarrows [\{1,\ 0\},\ \sqcup,\ \sqcap],$$

такое, что

$$И \leftrightarrow 1,\ Л \leftrightarrow 0,\ \vee \leftrightarrow \sqcup,\ \wedge \leftrightarrow \sqcap.$$

Это соответствие можно определить следующим образом: с каждым контактом a сопоставляем высказывание A — «контакт a замкнут». Тогда $a \sqcup b$ соответствует дизъюнкция $A \vee B$, $a \sqcap b$ — конъюнкция $A \wedge B$, $\bar{a}$ (инверсии контакта a) — отрицание $\bar{A}$, и вообще любой схеме, составленной из кон-

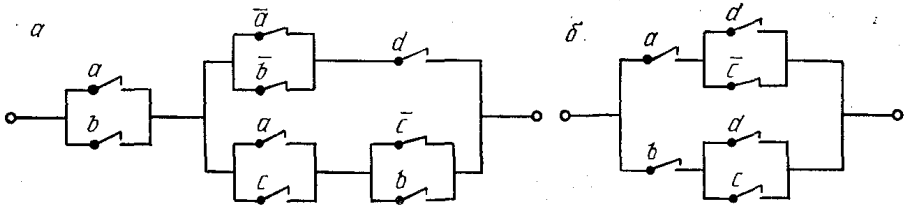


Рис. 25

тактов и их инверсий с помощью параллельных и последовательных соединений, соответствует на языке алгебры высказываний формула, составленная из высказываний и их отрицаний с помощью дизъюнкции и конъюнкции.

Такое взаимно однозначное соответствие между двумя алгебрами называется *изоморфизмом*, а сами эти алгебры — *изоморфными.*

Совершенно очевидно, что если две алгебры изоморфны, то они являются моделями одной и той же (абстрактной) алгебры. Обратное неверно, т. е. если две алгебры являются моделями одной и той же абстрактной алгебры, то они необязательно изоморфны (например, алгебра множеств и алгебра высказываний).

Наличие неизоморфных моделей булевой алгебры является признаком полиморфности теории булевой алгебры, обеспечивающей возможность ее широкого применения в различных конкретных ситуациях.

Установленный изоморфизм (2) $\rightleftarrows$ (3) делает излишним построение специальной теории алгебры контактных схем и открывает возможность применения аппарата алгебры высказываний к задачам анализа, упрощения и синтеза контактных схем.

Пусть, например, требуется упростить схему (рис. 25, *а*), т. е. построить «эквивалентную» ей схему, но с меньшим числом контактов. Данной схеме соответствует на языке алгебры высказываний следующая формула:

$$(A \vee B)\left((\overline{A} \vee \overline{B})\, D \vee (A \vee C)\,(\overline{C} \vee B)\right).$$

Путем преобразований эта формула упрощается и приводится к виду

$$A(D \vee \overline{C}) \vee B(D \vee C).$$

Последней соответствует схема (рис. 25, *б*), эквивалентная схеме, изображенной на рис. 25, *а* (эти две схемы имеют одинаковые состояния — «замкнуто» или «разомкнуто» — при любых наборах состояний входящих в них контактов).

Установленный изоморфизм объясняет широкие приложения булевой алгебры в современной технике.

Мы рассмотрели (см. 3.2, 3.3) один из возможных вариантов разъяснения сущности современного аксиоматического метода (разумеется, в сокращенном виде), предназначенный для классов с углубленным изучением математики или факультативных занятий, перспективность и удельный вес которых неизбежно возрастет в связи с реформой школы.

9. ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

1. Виды применения теории

1.1. Всякая теория важна своими применениями. Ими оправдывается само построение теории и в равной мере ее изучение. Поэтому основная цель изучения какой-нибудь теории состоит в том, чтобы научиться ее использовать.

Применение теории иногда понимается слишком узко, исключительно как «практическое применение» или «применение на практике», т. е. как непосредственное использование аппарата этой теории при решении практических задач (будем считать интуитивно ясным то, что обычно понимают под «практикой», «практической задачей» и т. д.).

Именно так понимают применение теории и в традиционном преподавании. Однако не менее важными являются использование одной теории в другой (алгебры в геометрии, геометрии в анализе и др.). В конце концов и применения этого вида связаны с практикой, но уже опосредствованно, через другую теорию. Если некоторая теория T_1 используется в другой теории T_2, а последняя имеет важные практические применения, то по существу это же можно утверждать и о первой.

Изолированность отдельных разделов и теорий внутри школьного курса математики, так же как изолированность математики от других предметов школьного обучения и особенно от физики в традиционном преподавании, объясняется, в частности, пренебрежением такого рода применениями.

Вместе с тем в современном развитии математики все большее значение приобретают именно ее опосредствованные связи с практикой через другие естественные науки, которые непосредственно связаны с развитием техники, производства. Наиболее существенные связи математики

с практикой осуществляются посредством математических моделей, используемых естественными науками, а в последнее время и не только естественными. Какой бы абстрактной ни выглядела современная математика, ее корни находятся глубоко в практике, но не только в былой практике землемеров и торговцев, а в современной практике физиков, химиков, биологов, экономистов и т. д.

Мы будем понимать «применение теории» в широком смысле, включая и непосредственные «практические» применения и применения в другой теории.

1.2. Всякое применение теории предполагает построение модели. В случае, когда теория применяется к решению практической задачи, строится модель этой задачи в понятиях теории, например составляется система уравнений. В этом случае строится абстрактная модель конкретной задачи. Но и сама задача доставляет нам конкретную модель абстрактной системы уравнений (так как отношение «быть моделью» является симметричным, исходя из интуитивного понимания «модели»). В случае, когда одна теория применяется в другой, строится модель первой в объектах другой (например, модель векторной алгебры в объектах геометрии или модель теории множеств в объектах теории делимости).

Такое использование термина «модель» необычно для традиционного школьного преподавания, где он применяется в одном лишь весьма узком смысле геометрических моделей, т. е. для обозначения тел, изготовленных из дерева, стекла, проволоки, которые мы применяем обычно в преподавании стереометрии как наглядные пособия для иллюстрации соответствующих понятий. Это применение термина «модель» вполне правомерно, так как не противоречит его более общему пониманию. Действительно, куб, пирамида представляют собой не абстрактные понятия, а конкретные тела, изготовленные из определенного материала, окрашенные в определенный цвет, обладающие свойствами, которые характеризуют эти абстрактные понятия, являются их моделями. Но и эти абстрактные понятия являются моделями конкретных тел, и когда мы решаем геометрические задачи, то обращаемся именно к абстрактным моделям конкретных тел, с которыми связаны эти задачи.

1.3. Вообще в школьном обучении мы занимаемся и «конструированием моделей», отличных от традиционных моделей геометрических тел (хотя в этом случае обычно не говорят, что строим «модель»). Речь идет об абстракт-

ных математических, точнее логико-математических, моделях систем конкретных объектов и отношений, фигурирующих в решаемых задачах.

В этом случае модель находится на более высокой ступени абстракции, чем задача, которую она моделирует, и, несмотря на это, она является более «наглядной», чем последняя.

Освобожденная от несущественных частностей, эта абстрактная модель обнажает структуру связей в системе конкретных объектов, открывая путь к решению задачи с помощью формального аппарата той теории, на языке которой она составлена. В этом смысле она и является более наглядной, легко обозримой.

В обучении понятие модели (в традиционном его понимании) всегда связывалось с наглядностью, а последняя — с конкретностью. Современное понятие модели, хотя включает и абстрактные модели, остается связанным с наглядностью, но само понимание наглядности так, как оно сложилось в дидактике, должно быть пересмотрено с учетом развития современной науки.

2. Связь математики с физикой в школьном обучении

2.1. Физика всегда была и остается основной областью приложения математики. Задачи физики являлись и являются сейчас стимулом для дальнейшего развития математики. Различные математические понятия и теории возникали и возникают из физических моделей и развиваются прежде всего для удовлетворения потребностей физики.

В течение всей истории развития физики и математики эти науки взаимно обогащали друг друга. Традиционное же преподавание физики и математики в школе характеризуется оторванностью, изолированностью друг от друга названных учебных дисциплин. Устранение этих недостатков в преподавании математики и физики — один из аспектов модернизации обучения.

2.2. В обучении математике связь с физикой, естественно, должна осуществляться не только путем применения уже сформированного математического аппарата, но и для его формирования.

Представляется целесообразной такая схема: от конкретной ситуации в области физических объектов к абстрактным математическим понятиям, на базе которых разрабатывается формальный математический аппарат, ис-

пользуемый для решения задач, связанных с этой и другими конкретными физическими ситуациями, а также задач, возникающих и в других предметных областях (эта схема реализует принятое нами за исходное ленинское положение о пути познания).

При осуществлении этой схемы выявляется и значение абстрактного характера математической теории, благодаря которому аппарат этой теории применяется в различных конкретных ситуациях, объединенных общностью структуры.

2.3. Приведем пример для иллюстрации описанной схемы. Совершенно очевидно, что одной из идейных основ связи математики с физикой в школьном обучении является понятие функции. Физика снабжает математику многочисленными примерами различных видов функций. Отвлекаясь от конкретных физических моделей, мы исследуем эти функции как абстрактные математические объекты, затем применяем приобретенные знания к изучению конкретных физических процессов.

Так, например, исходя из уравнений равномерного движения $s=vt$ и $s=s_0+vt$, мы приходим к необходимости изучения функций, выражаемых уравнениями $y=ax$ и $y=ax+b$.

Намного раньше, чем изучается производная, учащиеся узнают, что угловой коэффициент a прямой $y=ax+b$ в указанной физической модели равен скорости движения. Здесь y обозначает путь, а x — время.

Но уравнения $y=ax$ и $y=ax+b$ имеют и другие физические модели: они могут выражать скорость в равномерно-переменном движении как функцию времени $v=at$ и $v=v_0+at$ или объем и давление газа $v=v_0(1+\alpha t)$ и $p=p_0(1+\alpha t)$ как функции температуры (при определенных физических условиях).

Уравнение равномерно-переменного движения $s=v_0t+\frac{at^2}{2}$, в частности свободного падения $s=\frac{gt^2}{2}$, представляет модель квадратичной функции.

После исследования функции, выражаемой уравнением $y=ax^2+bx+c$, возвращаемся к физической модели и решаем связанные с нею задачи.

Закон Бойля — Мариотта $p=k/v$ (или $pv=k$) доставляет нам модель функции, выражаемой уравнением $xy=k$, результаты исследования которой используются при изучении этого физического закона.

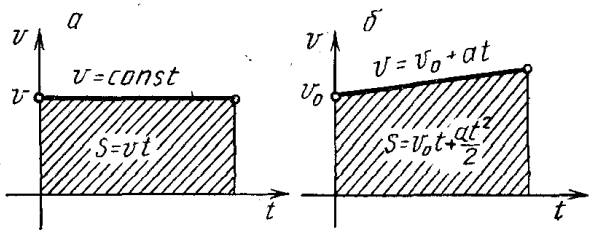


Рис. 26

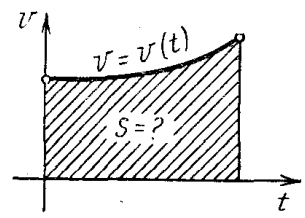


Рис. 27

Используя физическую интерпретацию некоторых функций, мы получаем возможность истолковать с той же (физической) точки зрения и площадь под графиком функции (область, ограниченная графиком, осью абсцисс и двумя перпендикулярами к ней). Наиболее простым примером может служить площадь под графиком скорости равномерного и равномерно-переменного движения (рис. 26, *а, б*), выражающая путь как функцию времени.

Этот метод определения пути по скорости может быть распространен и на случай неравномерного движения (рис. 27), и тогда он приводит нас к необходимости определения площади криволинейной трапеции, т. е. является стимулом для введения понятия определенного интеграла.

Мы приводили здесь лишь несколько примеров той связи, которая может быть осуществлена в преподавании математики и физики на базе идеи функции. С введением в школьные программы понятий производной, интеграла, простейших дифференциальных уравнений эта связь существенно расширяется.

Возможностей для осуществления связи в преподавании математики и физики, не использованных в традиционном обучении, как видно, много. Их раскрытие и использование — актуальная проблема педагогики математики.

2.4. Выявленная (см. 2.2) двусторонняя связь в преподавании математики и физики состоит в том, что, с одной стороны, физические задачи служат стимулом для расширения математических знаний, для введения и изучения новых математических объектов, с другой — новый математический аппарат используется для решения исходных и других физических задач.

Эта же особенность характеризует и связь математики с другими областями применений, а также внутреннюю связь между математическими теориями. Весьма поучительным примером может служить задача нахождения результата последовательного применения двух геометрических преобразований (их произведения). Данная задача приво-

дит к правилу умножения матриц, представляющих геометрические преобразования, а полученный новый математический аппарат (алгебра матриц) находит широкое применение в решении разнообразных задач.

3. Задачи

3.1. Интуитивно ясно, что наиболее эффективным средством развития математической деятельности учащихся является обучение «через задачи». Поэтому возникает проблема построения педагогически целесообразной системы задач, с помощью которой можно было бы провести ученика последовательно через все аспекты математической деятельности (выявление проблемных ситуаций и задач, математизация конкретных ситуаций, решение задач, мотивирующее необходимость расширения теории, и т. д.).

Названная проблема стоит прежде всего перед составителями учебников и сборников задач, но она отчасти возникает и перед учителем в его практической деятельности. Решение ее невозможно без уточнения понятий ситуации, задачи, без структурного анализа задач, который позволил бы нам оценить «сложность» задач и определить целесообразную последовательность их решения. В этой последовательности каждая задача должна нести определенную учебную нагрузку.

3.2. Рассмотрим общую схему такого уточнения и анализа, приспособленных для потребностей педагогики математики.

Любая проблемная ситуация и любая задача (понимаемые пока интуитивно) возникают в какой-то «предметной области». Эта предметная область характеризуется системой, состоящей из одного или нескольких множеств (которые могут быть объединены в одно универсальное множество) с установленными в них предикатами (выражающими свойства элементов этих множеств или отношения между ними): $(A_1, A_2, ..., A_k, P_1, P_2, ..., P_n)$.

Любая ситуация в предметной области описывается с помощью некоторой формулы, составленной из исходных предикатов P и логических операций:

$$\varphi(P_1, P_2, ..., P_n). \qquad (1)$$

Под задачей (в широком смысле) понимается требование отыскания области истинности

$$\{(x_1, x_2, ..., x_k) \mid x_i \in A_i \ (1 \leqslant i \leqslant k), \ \varphi(P_1, P_2, ..., P_n)\}. \qquad (2)$$

С одной и той же ситуацией, описанной формулой (1), могут быть связаны различные задачи, отличающиеся заданием определенных x_i в (2), в частности и «взаимно обратные» задачи.

Эта общая схема применима к задачам, сводящимся к решению системы уравнений или неравенств, и к другим типам задач, обычно решаемых в школьном курсе, за исключением задачи на доказательство.

Под задачей на доказательство предложения φ понимается требование отыскать хотя бы одну последовательность предложений $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ с определенными свойствами.

Приведенная схема может быть использована для структурного анализа задач (под «структурой» задачи понимается логическая структура формулы (1)) и позволяет сравнивать задачи по их «сложности». Легко устанавливается структурное тождество различных по содержанию и по методам решения задач (например, задач, сводящихся к системе уравнений, и задач на построение, решаемых методом геометрических мест, структура которых выражается одной и той же формулой $P(x, y)$ и $Q(x, y)$; различие состоит лишь в форме задания предикатов P и Q), а также структурное различие близких по содержанию задач.

3.3. По описанной схеме задача «найти наибольшую площадь и катеты прямоугольного треугольника, зная, что сумма катетов равна 10», означает найти область истинности

$$\{(s,\ x,\ y) \in R^3 \mid T(s,\ x,\ y) \text{ и } x + y = 10 \Rightarrow \max(s)\},$$

где через «$T(s, x, y)$» обозначен трехместный предикат «s — площадь, x и y — катеты прямоугольного треугольника», а через «$\max(s)$» — наибольшее из чисел s, находящихся с x и y в отношении T. Иными словами, это означает найти множество всех троек вещественных чисел (s, x, y), которые обращают логическую функцию (предикат)

$$T(s, x, y) \text{ и } x+y=10 \Rightarrow \max(s) \quad (1)$$

в истинное высказывание.

Один из возможных способов решения может быть представлен в виде следующей последовательности импликаций:

I способ

1) $T(s,\ x,\ y)$ и $x + y = 10 \Rightarrow s = \frac{xy}{2}$ и $y = 10 - x$;

2) $s = \frac{xy}{2}$ **и** $(y = 10 - x) \Rightarrow s = \frac{1}{2} x(10 - x)$;

3) $s = \frac{1}{2} x(10 - x) \Rightarrow s = -\frac{1}{2}(x - 5)^2 + 12{,}5$;

4) $s = -\frac{1}{2}(x - 5)^2 + 12{,}5 \Rightarrow ((x = 5) \Rightarrow (\max(s) \Leftrightarrow s = 12{,}5))$;

5) $x = 5$ **и** $y = 10 - x \Rightarrow y = 5$.

Мы получили единственную тройку вещественных чисел (12,5; 5; 5), «удовлетворяющую условиям задачи», т. е. обращающую логическую функцию, выраженную формулой (1), в истинное высказывание.

Решение этой задачи несколько упрощается, если предварительно было доказано, что произведение двух чисел, сумма которых постоянна, максимально, если эти числа равны:

II способ

1) $T(s, x, y) \Rightarrow s = \frac{xy}{2}$;

2) $s = \frac{xy}{2} \Rightarrow 2s = xy$;

3) $2s = xy$ **и** $x + y = 10 \Rightarrow ((x = y = 5) \Rightarrow (\max(2s) \Leftrightarrow 2s = 25))$;

4) $(\max(2s) \Leftrightarrow 2s = 25) \Rightarrow (\max(s) \Leftrightarrow s = 12{,}5)$.

Если эта задача решается после изучения производной, то возможен и такой способ решения:

III способ

1) $T(s, x, y)$ **и** $x + y = 10 \Rightarrow s = \frac{xy}{2}$ **и** $y = 10 - x$;

2) $s = \frac{xy}{2}$ **и** $y = 10 - x \Rightarrow s = \frac{1}{2}(10x - x^2)$;

3) $s = \frac{1}{2}(10x - x^2) \Rightarrow s' = 5 - x$;

4) $s' = 5 - x \Rightarrow (x = 5 \Rightarrow s' = 0)$ **и** $(x < 5 \Rightarrow s' > 0)$ **и** $(x > 5 \Rightarrow s' < 0)$;

5) $(x = 5 \Rightarrow s' = 0)$ **и** $(x < 5 \Rightarrow s' > 0)$ **и** $(x > 5 \Rightarrow s' < 0) \Rightarrow (x = 5 \Rightarrow \max(s))$;

6) $(x = 5 \Rightarrow \max(s)) \Rightarrow (\max(s) \Leftrightarrow s = 12{,}5)$.

Каждый из приведенных способов (I, II, III) решения задачи представлен в виде последовательности предложений, содержащих операции (собственно математические и логические), которые считаются известными («операция» понимается здесь в широком смысле, например определение максимума функции, определение площади прямоугольного треугольника по его катетам и др.). Разумеется, многие из этих операций являются сложными и могут быть более детально проанализированы (вследствие чего увеличится число компонент способа решения).

Такое представление облегчает сравнение способов решения. Однако сложность способа решения определяется не только числом компонент, но и самими компонентами. Если судить только по числу компонент, то следует считать, что из трех способов II способ самый простой, а III самый сложный. В действительности же II способ, очевидно, не проще, чем I, если учесть сложность отдельных компонент.

3.4. Структуру довольно широкого класса задач можно представить, как в приведенном (см. 3.3) примере, в виде импликации $P \Rightarrow Q$, а структуру способа решения — в виде последовательности импликаций: $P \Rightarrow P_1$, $P_1 \Rightarrow P_2$, ..., $P_{n-1} \Rightarrow P_n$, $P_n \Rightarrow Q$, в которой: а) посылка первой импликации — P; б) заключение последней импликации — Q; в) заключение каждой импликации, кроме последней, служит посылкой в следующей импликации. Используя транзитивность отношения следования, из этой последовательности предложений получаем в качестве следствия $P \Rightarrow Q$.

По существу мы разложили исходную задачу на последовательность задач. Если какая-нибудь подпоследовательность

$$P_k \Rightarrow P_{k+1}, \ \ldots, \ P_{k+l-1} \Rightarrow P_{k+l}$$

представляет собой способ решения некоторой ранее уже решенной задачи, то можно ее заменить через $P_k \Rightarrow P_{k+l}$. В таком случае число членов последовательности $P \Rightarrow P_1$, $P_1 \Rightarrow P_2$, ..., $P_n \Rightarrow Q$, определяющей способ решения данной задачи, уменьшится на $l - 1$.

Как видно, структурный анализ задачи и способа ее решения помогает выявить, какие задачи целесообразно решать до рассмотрения данной, чтобы она стала менее «сложной» и, что особенно важно в обучении, менее «трудной» для учащихся.

Необходимо различать *сложность* задачи как объективное свойство, присущее (в той или иной мере, которую мы еще, к сожалению, не умеем точно оценивать) каждой за-

даче, и *трудность* задачи, которая отражает отношение между задачей и тем, кто ее решает. Одна и та же задача может оказаться более трудной для одних и менее трудной для других. Таким образом, понятие «трудность» задачи носит чисто прагматический характер, а это нас именно интересует, так как нельзя построить эффективный процесс обучения без выявления отношения между содержанием и объектом обучения.

Чтобы облегчить учащимся решение задач (уменьшить для них трудность последних), надо построить систему задач так, чтобы при решении особо «сложных» из них можно было использовать ранее уже решенные задачи-компоненты.

Связь между трудностью и сложностью задачи можно довольно грубо и, разумеется, неточно (пока ни одно из этих понятий не определено) выразить следующим образом: трудность данной задачи (для данных учащихся) равна сложности этой задачи без сложности ранее уже решенных (этими учащимися) задач-компонент. Это предложение, хотя и выражает трудность задачи через неопределенное понятие сложности, все же является полезным в педагогике математики. Если считать «сложность задачи» понятием интуитивно ясным, то, чтобы уменьшить трудность данной задачи для данных учащихся, надо увеличить сложность ранее решенных задач-компонент. Это особенно важно при работе со средними и слабыми учащимися.

4. Прикладные и математические задачи

4.1. Рассмотренная задача (см. 3.3) была предложена с самого начала как математическая, т. е. как задача, сформулированная в математических терминах. Правда, нелегко ответить на вопрос, является ли она геометрической задачей. С точки зрения содержания она геометрическая (сформулирована в геометрических терминах), с точки зрения способа решения — это задача анализа (сводится к определению максимума некоторой функции).

Когда в какой-нибудь области науки (не математики), техники или практической деятельности возникает задача, она не является математической по своему содержанию. Это задача физическая, биологическая, химическая, техническая и т. д. Когда же хотят такую задачу решать математическими средствами, ее называют *прикладной* (по отношению к математике).

Прикладную задачу необходимо прежде всего перевести

на язык математики, какой-нибудь математической теории. В результате этого перевода мы получаем уже *математическую задачу* или *математическую модель* исходной прикладной задачи.

Разумеется, было бы неправильно утверждать, что в связи с применением математических средств и методов, например, в биологии последняя перестает быть биологией и становится математикой. Но отдельные биологические задачи, переведенные на язык математики (в котором нет никаких биологических терминов), становятся математическими.

Так как обучение математике включает обучение применению математического аппарата к решению разнообразных задач, возникающих как в самой математике, так и (особенно) вне ее, то под обучением решению задач надо понимать: а) обучение переводу задач, возникающих вне математики, в математические; б) обучение решению математических задач.

Некоторый отрыв теории от практики, наблюдаемый в традиционном преподавании, проявляется в том, что под практикой иногда понимают почти исключительно решение тренировочных задач отвлеченного характера, уже сформулированных в математических терминах, т. е. математических задач, которые (в такой формулировке) на практике не встречаются. В результате такого обучения учащиеся приобретают некоторые навыки в решении довольно сложных математических задач, но оказываются совершенно бессильными перед простой задачей, возникающей вне математики, так как не умеют ее переводить в математическую.

В стабильных сборниках задач имеется явно недостаточное число задач в «нематематической» формулировке, т. е. сформулированных на языке той предметной области, в которой они возникают. К тому же их тематика весьма ограничена и отчасти устарела. Но и эти немногие задачи редко решаются. Разумеется, легче начертить равнобочную трапецию и по ее основаниям и боковой стороне определить высоту, чем возиться с заклепкой с потайной головкой (рис. 28) и определять какой-либо ее элемент по другим данным элементам.

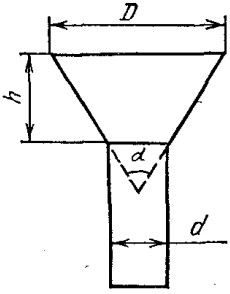


Рис. 28

Математическая сторона этих задач одна и та же, но с методической точки зрения эти задачи различные. Если в

первой рассматривается геометрический объект — равнобочная трапеция, то во второй речь идет об определенной технической детали, на которой нигде не видно трапеции, и перед нами стоит вопрос свести вторую задачу к первой, нематематическую — к математической.

Поэтому важно, чтобы решались обе эти задачи в указанной последовательности, ибо первая служит подготовкой для решения второй. Ясно также, что вторая задача, как и многие ей подобные, должна решаться не по готовому чертежу, на котором сразу же видна равнобочная трапеция, а по оригиналу. Надо принести в класс эту деталь, провести необходимые измерения, затем, выбрав удобную единицу масштаба, построить сечение (см. рис. 28), на котором и обнаруживается равнобочная трапеция.

Математическая задача, таким образом, получается самими учащимися в результате их активной мыслительной работы по абстрагированию ее от конкретного содержания. Умение видеть и отделять математическую сторону задачи от ее конкретного содержания воспитывается и закрепляется путем длительных упражнений. Этим самым учащиеся обучаются математизировать конкретные ситуации.

4.2. В школьной практике чаще всего перевод задачи в математическую осуществляется «составлением» уравнения или системы уравнений.

Методика составления уравнений (или системы уравнений) по условиям задачи достаточно широко освещена в методико-математической литературе, хотя, разумеется, нет общего метода (алгоритма) для составления уравнения по условиям любой задачи (решаемой составлением уравнения). Даже такая, кажущаяся вполне естественной, рекомендация — принять искомую величину за неизвестную, за x,— не является универсально применимой. Во многих задачах она приводит к явно нерациональным способам решения.

Можно, конечно, сформулировать некоторые рекомендации, пригодные для всех случаев решения задачи составлением уравнения (или системы уравнений), но они неизбежно будут весьма общими (тщательно изучай условия задачи; выясняй связи между фигурирующими в ней величинами; что целесообразно выражать в левой и правой частях уравнения; что принимать за неизвестное; какие другие величины необходимо выражать через неизвестное; какова область значений искомых величин и др.).

Математическое описание определяемой условиями задачи конкретной ситуации с помощью уравнения или системы уравнений обычно не является полным. Именно степень «неполноты» описания является причиной того, что решение уравнения или системы уравнений может и не быть решением задачи, из условий которой составлено это уравнение или система уравнений. Поэтому проверка данного решения по условиям задачи считается составной частью процесса решения задачи. Однако можно уменьшить степень неполноты математической модели задачи, добавляя к уравнению (или системе уравнений) систему неравенств (и, возможно, других предложений), выражающих ограничения, накладываемые условиями задачи на различные фигурирующие в ней величины. В таком случае решение полученной смешанной системы уравнений и неравенств является и решением задачи. По существу, здесь «проверка по условиям задачи» включена в математическое описание этих условий.

Проиллюстрируем эти общие рассуждения конкретным примером. Рассмотрим следующую задачу: «В трех баках было вместе 50 л бензина, причем в первом было на 10 л больше, чем во втором. Когда из первого бака вылили в третий 26 л, во втором и третьем баках стало бензина поровну. Сколько бензина было первоначально в первом баке?»

Обычное (по установившейся школьной практике) решение данной задачи состоит в сведении ее к уравнению

$$x-10=50-x-(x-10)+26,$$

где x — первоначальное количество литров бензина в первом баке. Решение этого уравнения ($x=32$) считают и решением задачи, так как оно «удовлетворяет условиям задачи», по смыслу которых $x>0$.

Однако более глубокий анализ условий задачи обнаруживает, что они накладывают на величину x более сильные ограничения и решение уравнения не является решением задачи. Проведем такой анализ.

Таблица 9.1

Бак	Количество бензина	
	первоначально	после переливания
Первый	x	$x-26$
Второй	$x-10$	$x-10$
Третий	$50-x-(x-10)$	$50-x-(x-10)+26$

В табл. 9.1 величины, фигурирующие в задаче, выражены как функции одной из них (x — количество бензина в первом баке до переливания), причем по смыслу задачи некоторые из этих величин положительные, некоторые неотрицательные, а две из них равны. Выразив это математически, получаем систему, состоящую из одного уравнения и пяти неравенств:

$$\left.\begin{array}{l} x-10=50-x-(x-10)+26; \\ x>0; \\ x-10>0; \\ 50-x-(x-10)\geqslant 0; \\ x-26\geqslant 0 \\ 50-x-(x-10)+26>0. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Так как некоторые неравенства системы (1) являются следствиями других (из этой же системы), то ее можно упростить (исключением следствий):

$$\left.\begin{array}{l} x-10=50-x-(x-10)+26; \\ x-26\geqslant 0; \\ 50-x-(x-10)\geqslant 0. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Таким образом, по существу, решение задачи сводится к решению системы (2), а не к решению одного уравнения.

Система (2) легко приводится к следующей:

$$\left.\begin{array}{l} x=32; \\ x\geqslant 26; \\ x\leqslant 30, \end{array}\right\} \qquad (3)$$

несовместность которой очевидна.

Отсюда следует, что и условия задачи (приводящие к несовместной системе) несовместны (противоречивы), и задача не имеет решения. Это можно обнаружить, разумеется, и без применения уравнений и неравенств, а с помощью более тщательного анализа содержания. Действительно, если из первого бака перелили в третий 26 л бензина, а всего в трех баках было 50 л, то поровну бензина во втором и третьем баках не будет. Тем более интересно построение такой достаточно детальной модели (системы уравнений и неравенств), описывающей ситуацию, связанную с задачей, и приводящей к тому же результату.

Проиллюстрированная на этой задаче методика более полного перевода условий задачи в смешанную систему уравнений и неравенств имеет некоторые преимущества по сравнению с традиционной.

Во-первых, такая методика приучает к более глубокому анализу условий задачи; во-вторых, она обучает математическому описанию конкретных ситуаций, составлению математических моделей (хотя, разумеется, в очень простых случаях), что имеет важное общеобразовательное значение в свете современных тенденций широкого использования математического моделирования; в-третьих, эта методика предупреждает ошибки, часто допускаемые, когда забывают проверить решение уравнения (или системы уравнений) по условиям задачи или проверяют, как в нашем примере, не все условия задачи.

Описанная методика содержит и ответ на ставший предметом дискуссии вопрос о том, нужна ли проверка решения по условиям задачи.

4.3. Часто одну и ту же математическую задачу (например, приведенную в 3.3) можно решить различными способами, различными средствами. Очевидно, такую задачу следует решать теми доступными учащимся средствами, какими она решается проще. Вряд ли какие-нибудь соображения могут оправдать применение громоздкого искусственного способа при наличии естественного и явно более простого способа.

Несмотря на очевидность этих истин, в традиционном преподавании широко применяется искусственный арифметический способ решения таких задач, которые очень просто решаются алгебраическим способом.

Приведем пример. Известна задача типа: «На ферме были кролики и утки, всего 1400 голов и 3600 ног. Сколько было кроликов и сколько уток?» Совершенно естественно эта задача переводится в систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 1400; \\ 4x + 2y &= 3600, \end{aligned}\right\}$$

которая легко решается (и учащимися начальных классов).

Однако в традиционном преподавании школьников заставляют решать подобные задачи искусственным приемом, так называемым способом «предположения». Их «учат» рассуждать примерно так: «если на ферме было бы, допустим, одних уток 1400 голов, то ног было бы 2800. Но на ферме больше «ног», так как там есть еще и кролики. Если одну утку заменить одним кроликом, то число ног увеличится на 2. Сколько же уток надо заменить кроликами, чтобы количество ног увеличилось на $3600-2800=800$? Очевидно, столько, сколько раз 2 содержится в 800, т. е. $800:2=400$.

Итак, на ферме было 400 кроликов, а следовательно, 1400 − 400 = 1000 уток».

Совершенно формальным было бы сравнение двух способов решения задачи лишь по длине их записи. Детальное рассмотрение этих способов обнаруживает более существенное различие. В алгебраическом решении ход рассуждений носит естественный характер и не вызывает затруднений у учащихся. Рассуждения, связанные с арифметическим способом решения, настолько искусственны, что не только дети, но и взрослые не догадываются пойти по такому пути, если предварительно этот путь рассуждений не заучен.

Несмотря на сопоставление арифметического и алгебраического способов решения, которое наглядно показывает простоту и естественность второго и сложность и искусственность первого, сторонники арифметического способа продолжают утверждать, что последний заслуживает предпочтения потому, что он якобы заставляет учащихся рассуждать и поэтому развивает их логическое мышление, а алгебраический способ освобождает учащихся от рассуждений и не развивает их логическое мышление.

В действительности же дело обстоит не так. Во-первых, алгебраический способ освобождает учащихся лишь от громоздких и искусственных рассуждений, неизбежных при арифметическом способе. Во-вторых, выработку «жестких» структур рассуждений, обеспечивающих решение так называемых «типовых» задач, нельзя отождествлять с развитием логического мышления.

Алгебраический способ решения благодаря своей общности охватывает задачи с самыми разнообразными структурами и этим самым развивает «гибкость» мышления учащихся, учит их переводить конкретную ситуацию задачи в абстрактную математическую модель, пригодную для решения задач с другим конкретным содержанием, но с той же структурой.

Арифметический способ не раскрывает структуру ситуации, описанной в задаче, и часто решение остается привязанным к конкретному содержанию задачи (нам известен случай, когда ученица III класса заплакала во время контрольной работы потому, что ей предложили задачу на «яблоки», а накануне решали задачу на «конфеты»). Об этом говорят и сами названия некоторых типов задач («на совместную работу», «на сплавы», «на движение» и т. п.).

Критикуя арифметический способ решения задач, мы не намерены предложить его полное исключение из школь-

ной практики. Это невозможно и нецелесообразно. Однако его применение должно быть ограничено лишь теми задачами, которые действительно можно проще решить арифметическим способом.

5. Обучение решению задач

5.1. Как научить учащихся решать задачи — это, очевидно, одна из наиболее сложных и важных педагогических проблем. Сложность ее объясняется тем, что отсутствует общий метод (алгоритм), овладение которым гарантировало бы умение решить любую задачу. Важность ее состоит в том, что, с одной стороны, теоретические знания нужны для решения разного рода задач, возникающих в любой области деятельности, с другой стороны, именно обучение «через задачи» в наибольшей мере является развивающим обучением.

Обучение решению задач будем понимать как обучение мыслительной деятельности, осуществляемой в процессе решения задач. Анализ этой деятельности выявляет два тесно переплетающихся в процессе решения задач компонента: *алгоритмический*, когда человек решает задачу (или подзадачу) по известному ему общему методу (алгоритму), и *эвристический* (творческий), когда он решает нестандартную задачу (для которой нет общего метода решения). В первом случае человек решает задачу не задумываясь, «машинально», во втором он ведет «поиск» решения. Эти два вида деятельности существенно отличаются по своей структуре.

Представим себе, что учащимся IV класса предложена задача: сложить два числа, 25 036 и 16 317. Все решают не задумываясь, кто быстрее, кто медленнее, некоторые, возможно, ошибаются, затем исправляют ошибки. При этом отсутствуют признаки напряженности поиска и радости открытия. Все решают по известному правилу сложения «в столбик», по определенному «трафарету».

Совершенно иным является поведение учащихся, если предложить им, например, такую задачу: «Собрали 100 кг грибов, влажность которых составляет 99%. Когда грибы подсушили, влажность снизилась до 98%. Какой стала масса грибов после подсушивания?»

Как только сообщены условия задачи, учащиеся задумываются. Здесь, в отличие от первой задачи, идет напряженный поиск, сменяющийся затем радостью открытия.

5.2. С весьма существенной для обучения точки зрения

задачи делят на *стандартные*, решаемые по определенным алгоритмам, и *нестандартные*, для которых нет соответствующих алгоритмов и для решения которых необходим поиск.

Значимость нестандартных задач состоит в том, что они предъявляют настоящий «вызов» интеллекту и способствуют в наибольшей мере его развитию. Однако без умения решать стандартные задачи нельзя научиться решать нестандартные. Стратегия обучения зависит от того, идет речь о решении стандартных или нестандартных задач.

Школьная математика содержит разного рода стандартные задачи — от задачи сложения многозначных чисел («в столбик») до задач дифференцирования и интегрирования определенных классов функций. В школьной математике имеется и большое разнообразие нестандартных задач (на доказательство, преобразование алгебраических выражений, решение некоторых уравнений, неравенств, систем уравнений и т. д.).

Можно выделить три вида учебных ситуаций, связанных с решением задач, требующих различных стратегий обучения: I — решение стандартных задач, общий метод решения которых еще не известен учащимся; II — решение стандартных задач, общий метод решения которых уже известен учащимся; III — решение нестандартных задач.

В ситуации I речь идет о предварительном решении однотипных частных задач, и стратегия обучения должна быть ориентирована на открытие учащимися (с помощью учителя) общего метода (алгоритма) решения любой задачи данного класса однотипных задач.

В ситуации II речь идет о применении уже известных общих правил, формул, предписаний, и здесь требуется лишь умение конкретизировать, применять общее предписание к предложенной частной задаче. Предварительно необходимо отнести эту задачу к классу задач, решаемых с помощью известного общего метода. Таким образом, в данной ситуации стратегия обучения должна быть ориентирована на обучение распознаванию принадлежности частных задач к классам задач, решаемых определенными, уже известными методами.

В ситуации III, наиболее сложной с дидактической точки зрения, стратегия обучения должна быть ориентирована на обучение методам поиска решений.

Следует считать ошибочной точку зрения, согласно которой якобы нельзя обучать решению нестандартных задач. Можно обучать решению нестандартных задач, если

под этим понимать обучение методам поиска решений. Много полезного в этой области содержится в известных книгах Дж. Пойа «Как решать задачу» (М., 1959) и «Математическое открытие» (М., 1976).

В настоящее время, когда разработаны регулярные методы поиска решений задач, предназначенные для обучения ЭВМ (искусственного интеллекта), представляется возможным заимствование некоторых из этих методов и их адаптация для обучения школьников (естественного интеллекта) поиску решения задач. По существу эти методы получены в результате глубокого анализа и последующей формализации деятельности человека в процессе решения задач. Поэтому вполне оправдано их заимствование и, разумеется, некоторая модификация с целью обучения человека этой деятельности.

Разумеется, применение описываемой концепции и разработанных на ее основе дидактических материалов в обучении школьников решению задач лишь в какой-то мере способствует решению поставленной педагогической проблемы — как научить учащихся решать задачи.

Результаты обучения зависят от большого числа факторов, в частности (и не в последнюю очередь) от того, насколько учитель глубоко усвоил различные стратегии обучения решению задач и творчески их применяет в практике обучения.

10. ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ. ОБЩИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Интуитивное понятие алгоритма

1.1. Рассмотрим задачу: «Делится ли натуральное число a на натуральное число b?» По существу, мы имеем здесь не одну задачу, а бесконечный класс однотипных задач (столько задач, сколько существует пар натуральных чисел $(a; b)$).

Естественно возникает вопрос: существует ли общий метод, позволяющий для любой частной задачи этого класса (получаемой подстановкой вместо a и b конкретной пары натуральных чисел) в конечное число шагов дать требуемый ответ («Да» или «Нет»).

Таким общим методом, как известно, является процедура деления «углом»: делим a на b (для любой пары натуральных чисел $(a; b)$ это выполнимо в конечное число ша-

гов), если остаток 0 — ответ «Да», если остаток отличен от 0 — ответ «Нет».

Рассмотрим еще одну задачу: «Имеет ли уравнение $ax^2+bx+c=0$, где a, b, $c \in Q$, корни (вещественные)?» Здесь бесконечный класс однотипных задач (столько задач, сколько троек $(a; b; c)$ рациональных чисел), и вновь возникает тот же вопрос: существует ли общий метод, позволяющий для любой задачи этого класса в конечное число шагов дать требуемый ответ («Да» или «Нет»)?

Как известно, такой общий метод существует и он состоит в следующем: определяется знак дискриминанта $D=b^2-4ac$ (это, очевидно, всегда выполнимо за конечное число шагов: вычислить b^2, вычислить $4ac$, сравнить два рациональных числа — b^2 и $4ac$); если $D \geqslant 0$, то получаем ответ — «Да», если $D<0$, то ответ — «Нет».

Мы рассмотрели два класса задач, требующих ответа вида «Да» или «Нет». Вопрос, который мы дважды поставили («существует ли общий метод, позволяющий для любой задачи данного класса в конечное число шагов дать ответ «Да» или «Нет»), в математике называют *проблемой разрешения* для этого класса задач, а общий метод, если он существует, называется *разрешающей процедурой* или *разрешающим алгоритмом.*

Слово «алгоритм» происходит от имени среднеазиатского математика Мухаммед бен Муса аль-Хорезми (т. е. «из Хорезма»), благодаря трудам которого (IX—X вв.) в Европе стали известны способы действий с числами в десятичной системе счисления.

В течение столетий значение слова «алгоритм» постепенно обобщалось, и сегодня под алгоритмом, как видно из приведенных примеров, понимают общий метод (предписание, инструкция, свод правил), указывающий, какие действия и в каком порядке необходимо выполнить для решения (в конечное число шагов) любой задачи из данного класса однотипных задач.

1.2. В школьной математике встречаются, однако, не только классы задач, требующих ответа вида «Да» или «Нет». В качестве ответа нередко требуется предъявление некоторого объекта (числа, точки, пары чисел, функции и т. д.). Формулировка таких задач начинается обычно словом «найти», словами «чему равно» и т. д.

Рассмотрим в качестве примера задачу: «Чему равен наибольший общий делитель (НОД) натуральных чисел a и b $(a>b)$?»

Здесь мы вновь имеем бесконечный класс однотипных задач, требующих в качестве ответа предъявления определенного натурального числа (наибольший общий делитель

данной пары чисел). Опять возникает тот же вопрос: существует ли общий метод, позволяющий для любой задачи этого класса в конечное число шагов дать требуемый ответ?

Таким общим методом является метод последовательного деления (известный под названием «алгоритм Евклида»): делим a на b; если остаток $r_1=0$, то НОД $(a; b)=b$; если $r_1\neq 0$, то делим b на r_1; если остаток $r_2=0$, то НОД $(a; b)=r_1$; если же $r_2\neq 0$, то делим r_1 на r_2. Производим эти действия до получения остатка $r_n=0$. Тогда НОД $(a; b)=r_{n-1}$, где r_{n-1} — последний отличный от 0 остаток.

После этих действий возникает вопрос: всегда ли за конечное число шагов можно получить нулевой остаток?

Легко доказать, что описанная процедура последовательного деления конечна (любой из остатков неотрицателен $(r_i\geqslant 0)$, а последовательность остатков убывает $(b>r_1>r_2>\ldots)$, следовательно, она конечна и последний остаток равен 0).

Рассмотрим следующую задачу: «Решить систему неравенств

$$\left.\begin{array}{l} x>a; \\ x<b; \end{array}\right\}$$
$$a,\ b\in Z$$

в множестве R вещественных чисел» или «Найти множество вещественных решений системы неравенств

$$\left.\begin{array}{l} x>a; \\ x<b, \end{array}\right\}$$

т. е. найти множество $E=\{x|x\in R$ **и** $x>a$ **и** $x<b\}$».

Здесь опять имеем бесконечный класс однотипных задач (столько задач, сколько пар $(a; b)$ целых чисел), и возникает тот же вопрос: существует ли общий метод, позволяющий для любой задачи этого класса в конечное число шагов дать ответ в виде некоторого множества (множества решений системы) вещественных чисел.

Общий метод для этого класса задач хорошо известен: сравнить a и b (из двух целых чисел мы умеем определить в конечное число шагов, какое из них больше); если $a<b$, то $E=]a; b[$; если же $a\geqslant b$, то $E=\varnothing$.

Рассмотрим еще одну задачу: «Решить уравнение $ax^2+bx+c=0$, где a, b, $c\in Q$, в множестве R», или «Найти множество вещественных корней этого уравнения», т. е. найти $E=\{x|x\in R$ **и** $ax^2+bx+c=0\}$.

Мы имеем здесь бесконечный класс однотипных задач, требующих в качестве ответа предъявления некоторого множества вещественных чисел (множества корней данного уравнения), и опять возникает тот же вопрос: существует ли общий метод, позволяющий для любой задачи этого класса в конечное число шагов дать ответ в виде некоторого множества.

Общеизвестен метод решения данного класса задач, который можно описать следующим образом:

1) вычислить дискриминант $D=b^2-4ac$;

2) если $D<0$, то $E=\varnothing$;

3) если $D=0$, то $E=\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$;

4) если $D>0$, то $E=\left\{\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right\}$.

Здесь возникают вопросы: все ли шаги описанного процесса выполнимы; всегда ли можно в конечное число шагов определить точные значения корней уравнения $ax^2+bx+c=0$?

Очевидно, когда $D>0$ и D не является полным квадратом, то $\sqrt{D}$ — иррациональное число, и в конечное число шагов можем указать лишь приближенные значения корней с любой степенью точности. Таким образом, на поставленный вопрос о существовании общего метода можно ответить утвердительно лишь при условии, что допускается в качестве ответа и множество приближенных значений корней уравнения $ax^2+bx+c=0$ (с любой наперед заданной степенью точности).

Мы рассмотрели три класса однотипных задач вида «найти» или «чему равно». Поставленный для каждого из этих классов задач вопрос: существует ли общий метод, позволяющий для каждой задачи данного класса в конечное число шагов дать адекватный ответ,— называется *проблемой вычисления*, а искомый общий метод, если он существует, называется *вычислительной процедурой* или *вычислительным алгоритмом*.

В школьной математике мы имеем дело с большим разнообразием разрешающих и вычислительных алгоритмов (и те и другие называются кратко алгоритмами), но там же встречаем и много общих методов решения задач, очень похожих на алгоритмы, но обладающих не всеми свойствами, характеризующими всякий алгоритм.

1.3. Мы упомянули, что интуитивно под алгоритмом понимают общепонятное, точное предписание о том, какие

действия и в каком порядке необходимо выполнить, чтобы решить (в конечное число шагов) любую задачу из данного (обычно бесконечного) класса однотипных задач.

Данное предложение, разумеется, не является математическим определением, так как в нем встречаются термины, смысл которых хотя интуитивно, может быть, и ясен, но точно не определен («предписание», «общепонятное», «точное», «действие», «шаги»). Однако оно представляет собой разъяснение того, что обычно вкладывается в интуитивное понятие алгоритма, а для наших целей (разработка методики обучения решению различных алгоритмически разрешимых классов задач) это понятие достаточно.

Когда в математике поиск алгоритма для некоторого нового класса задач безуспешен, то могут возникнуть две гипотезы: а) искомый алгоритм существует, а следовательно, поиск надо продолжить; б) искомый алгоритм не существует, и в этом случае, разумеется, поиск следует прекратить, так как бесполезно искать то, что не существует. Но в этом случае надо доказать несуществование искомого алгоритма, а для этого необходимо иметь точное, математическое понятие алгоритма. Были разработаны математические теории алгоритмов, основанные на различных (эквивалентных) уточнениях этого понятия в виде рекурсивной функции, машины Тьюринга (или машины Поста), нормального алгоритма Маркова. Математическое понятие алгоритма может быть предметом изучения лишь на факультативных занятиях.

Приведем общие свойства, присущие каждому алгоритму:

а) массовость, т. е. алгоритм предназначен не для решения одной частной задачи, а для решения любой частной задачи из данного класса однотипных задач;

б) детерминированность, т. е. алгоритм представляет собой строго определенную последовательность шагов; он однозначно определяет первый шаг и какой шаг следует за каждым шагом, не оставляя решающему задачу никакой свободы выбора следующего шага в процессе решения;

в) результативность, т. е. решая любую задачу из данного класса задач по данному алгоритму, в конечное число шагов получаем результат (разумеется, для различных задач этого класса число шагов может оказаться различным, но оно всегда конечно).

Перечисленные общие свойства алгоритмов служат критериями для определения корректности формулировок алгоритмических предписаний в школьном курсе математики.

Необходимо отметить, что понятие «шаг», применяемое для разъяснения интуитивного понятия алгоритма и свойств детерминированности и результативности, является относи-

тельным. Например, в приведенном алгоритме Евклида деление одного числа на другое рассматривается как шаг, но сама процедура деления одного числа на другое («деление углом») — это алгоритм, т. е. конечная последовательность шагов.

Один и тот же общий метод решения может быть представлен в виде последовательности шагов по-разному (это часто встречается и в процессе решения задач в школе, разные учащиеся по-разному определяют отдельные шаги процесса решения), и не всегда отдельные шаги соответствуют отдельным «элементарным» действиям (само понятие «элементарное действие» относительно). Поэтому результативность определяется по эффективной выполнимости (осуществимости в конечное число шагов, машинально) каждого шага алгоритма.

Сложность проблемы обучения учащихся решению задач состоит, в частности, и в том, что далеко не все учащиеся бывают одинаково подготовленными к тому, чтобы определенные «шаги» выполнять машинально, не задумываясь. Когда говорят об улучшении «вычислительных навыков» учащихся, имеют в виду, в частности, повышение уровня такой подготовленности учащихся.

2. Операторно-логическая структура

2.1. Более детальное исследование различных алгоритмов, их структуры выявляет возможность представления каждого алгоритма в виде последовательности двух типов шагов, которые назовем соответственно операторами и логическими условиями.

Оператор обозначает некоторое действие (в широком смысле), в результате которого образуется какой-то новый промежуточный результат из уже имеющихся к данному моменту промежуточных результатов или исходных данных. Следующий за данным оператором шаг предписан алгоритмом однозначно, независимо от полученного промежуточного результата.

Логическое условие включает: а) проверку (находятся ли некоторые промежуточные результаты или исходные данные в определенном отношении или они обладают определенным свойством); б) решение вопроса о том, какой шаг должен быть следующим в зависимости от результатов проверки. Логическое условие (в отличие от оператора) не приводит к новому промежуточному результату, оно лишь определяет дальнейший ход процесса решения задачи.

Последовательность из операторов и логических условий называют также операторно-логической структурой (ОЛС). Всякий алгоритм представим в виде ОЛС. Однако, очевидно, не всякая ОЛС представляет алгоритм.

2.2. В школьном курсе математики рассматривают общие методы решения многих классов задач, представимые в виде ОЛС, но не являющиеся алгоритмами, так как некоторые входящие в них операторы или проверка логических условий не являются эффективно выполнимыми.

Например, задача распознавания отношения между двумя прямыми решается следующим общим методом (применимым к любой задаче этого класса). Для любых двух данных прямых необходимо проверить: 1) лежат ли эти прямые в одной плоскости; 2) если нет, то они скрещиваются; 3) если да, то проверить, имеют ли они общую точку; 4) если нет, то они параллельны; 5) если да, то они пересекаются.

Предписанная этим методом проверка логических условий не является эффективно выполнимой средствами школьной геометрии. Действительно, у нас нет средств для проверки выполнимости условия принадлежности двух прямых одной плоскости, и не во всех конкретных случаях (частных задачах этого типа) мы в состоянии ответить на вопрос: имеют ли две данные прямые общую точку (может быть, имеют, может быть, нет, проверить это не всегда возможно). Таким образом, описанный общий метод решения однотипных задач не обладает результативностью. Однако эта объективная характеристика метода не снижает его значимости в обучении, она отражает лишь характер рассматриваемого класса задач. Поэтому в дидактике возникла потребность в различных «ослаблениях» выработанного в математике понятия алгоритма. Одним из них является *алгоритм сводимости* — предписание, которое *сводит* решение задач некоторого типа к решению задач, принимаемых за решенные.

Так, описанный общий метод можно рассматривать как алгоритм сводимости: задача распознавания отношения между двумя прямыми сводится к задачам проверки принадлежности прямых одной плоскости и наличия или отсутствия общей точки.

Имея в виду значимость в обучении общих методов решения задач, не только в тех случаях, когда они представляют собой алгоритмы, но и когда они лишь «в какой-то мере алгоритмичны», мы рассматриваем ОЛС как описание

общих методов решения задач, не выделяя специально алгоритмов. Наличие в ОЛС отдельных операторов или проверок логических условий неалгоритмического характера отражает тесное переплетение в процессе решения задач двух компонент мышления: алгоритмической и эвристической (творческой).

Составление и использование в обучении ОЛС в тех случаях, когда не все шаги общего метода носят алгоритмический характер, является важным дидактическим средством, способствующим выделению в процессе решения задач тех шагов, которые требуют творческого поиска.

3. Схемы алгоритмов

3.1. В школьной практике алгоритмы обычно представляются в виде словесных предписаний, включающих чаще всего одну или несколько формул. Редко используются более наглядные формы представления алгоритмов и вообще ОЛС.

Всякую ОЛС можно наглядно и в то же время точно изобразить в виде схемы, состоящей из блоков и стрелок. Каждый шаг передается с помощью блока. Блок, представляющий оператор, изображается в виде прямоугольника, внутри которого обычно записывается содержание оператора. Блок, представляющий логическое условие, передается в виде ромба, внутри которого записывается проверяемое логическое условие.

Если за шагом A непосредственно следует шаг B, то от блока A к блоку B проведена стрелка (исходящая из A и оканчивающаяся в B).

От каждого прямоугольника исходит только одна стрелка, от каждого ромба — две стрелки: одна с пометкой «Да», идущая к блоку, следующему за логическим условием, если это условие выполняется, другая — с пометкой «Нет», идущая к блоку, следующему за логическим условием, если оно не выполняется.

«Вход» и «выходы» изображаются овальными фигурами, внутри которых записывается соответственно исходная задача или результат.

3.2. По существу схема алгоритмов представляет собой ориентированный граф с одним входом (вершиной, к которой не проведена ни одна стрелка) и одним или несколькими выходами (вершина, из которой не исходит ни одна стрелка). Вершины этого графа (прямоугольники и ромбы) изображают операторы и логические условия ОЛС (в част-

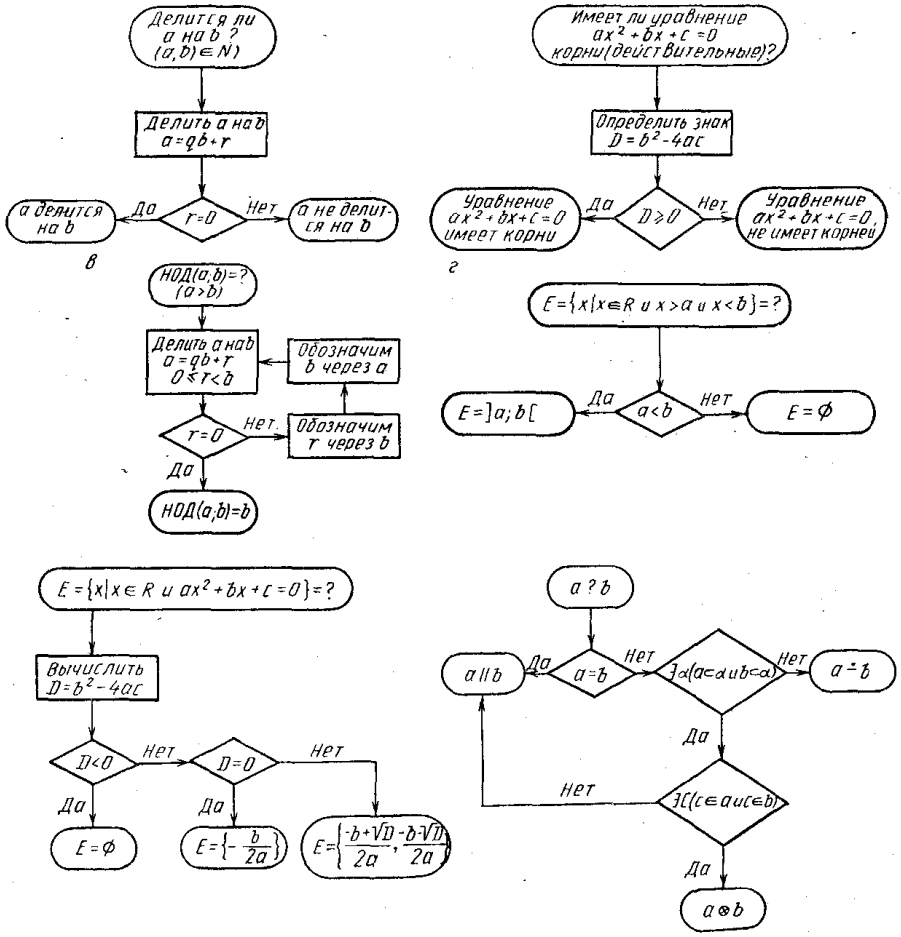


Рис. 29

ности, алгоритма), а ребра-стрелки указывают последовательность шагов.

Рассмотренные (см. 1.2) ОЛС можно представить в виде схем, изображенных на рис. 29.

4. Обучение общим методам решения задач

4.1. В школьном курсе математики встречаются классы однотипных задач, решаемых общими методами, для которых существуют алгоритмы или близкие к алгоритмам общие методы решения. Обучение общим методам предполагает «восхождение» к общему методу от решения разнообразных частных задач, создание педагогических ситуаций,

приближающих учащихся к открытию общего метода решения.

Возникает новый тип учебных задач: описать или наглядно представить в виде схемы алгоритмов общий метод решения определенного класса задач с учетом анализа процесса решения некоторых частных задач этого класса.

Описание или наглядное представление общего метода решения некоторого класса задач требует: а) тщательного анализа частных задач этого класса, приводящих к различным результатам; б) выявления операторов и последовательности их выполнения при решении частных задач данного класса; в) выявления всех логических условий, влияющих на дальнейший ход решения и приводящих к различным результатам, при обобщении частных задач; г) определение последовательности операторов для всех возможных случаев выполнения выделенных логических условий.

Решение подобного рода задач, как видно, включает элементы исследования и уже не может быть полностью отнесено к алгоритмическому виду деятельности.

4.2. Рассмотрим на примерах, а затем и в общем теоретическом плане переход от решения однотипных частных задач к общему методу решения соответствующего класса задач.

В качестве первого примера возьмем класс однотипных задач типа «Решить уравнение $ax=b$».

Для подготовки учащихся к описанию общего метода решения недостаточно решать конкретные уравнения: $3x=18$; $0{,}5x=7$; $2x=9$, в которых $a\neq 0$. Так как обычно ограничиваются этими частными задачами, то учащиеся, решая общую задачу, т. е. решая уравнение $ax=b$, получают единственное решение b/a без дополнительных условий существования этого решения. Но если перед решением общей задачи рассматриваются и такие уравнения, как $0\cdot x=5$ и $0\cdot x=0$ (или приводящие к ним), составляющие вместе с первыми все разнообразие уравнений класса $ax=b$, приводящих к различным результатам, то с помощью анализа частных случаев и выяснения соответствующих логи-

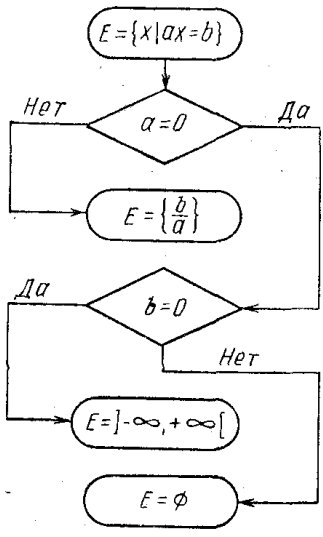


Рис. 30

ческих условий (от выполнения или невыполнения которых зависит принадлежность уравнения к одному из подклассов, определяемых этими условиями), приходим к описанию общего метода и его представлению в виде схемы алгоритма (рис. 30).

Разнообразие полученных результатов и их зависимость от логических условий показаны в табл. 10.1.

Таблица 10.1

$a=0$	$b=0$	E
И	И	$Q\,(R)$
И	Л	$\varnothing$
Л	И	$\left\{\frac{b}{a}\right\}$
Л	Л	

Примечание. При $a=b=0$ полагаем $E=Q$ $(E=R)$ в зависимости от того, в каком множестве (Q или R) решается уравнение.

По теме «Квадратные уравнения» (см. «Алгебра 7») можно составить такой перечень классов стандартных задач: 1) решение квадратных уравнений графическим способом; 2) решение квадратных уравнений выделением квадрата двучлена; 3) решение квадратных уравнений по формуле корней; 4) определение знаков корней квадратного уравнения по коэффициентам (с применением теоремы Виета); 5) составление квадратного уравнения по заданным его корням; 6) разложение квадратного трехчлена на множители; 7) построение графика функции $y=ax^2+bx+c$.

Для всех перечисленных классов задач в результате изучения данной темы должны быть сформулированы или представлены в удобной наглядной форме общие методы решения. Усвоение этих методов будет более глубоким и прочным, если учащиеся привлекаются в процессе обучения к поиску и описанию соответствующих методов решения.

Рассмотрим первый из перечисленных классов стандартных задач по теме «Квадратные уравнения».

В учебном пособии «Алгебра 7» решается одна частная задача этого класса ($x^2+2x-8=0$) и не все подготовлено для необходимого обобщения и формулировки общего метода (алгоритма) решения задач данного класса. Необходимо решить еще две частные задачи (например, $x^2-2x+1=0$ и $x^2+2x+2=0$), составляющие вместе с рассмотренной совокупность разнообразных задач данного класса, приводящих ко всем возможным типам результатов. По существу в учебном пособии описан и общий метод, но он не выделен, четко не сформулирован, наглядно не изображен.

Таблица 10.2

Взгляд назад на решение частных задач	Обобщение метода решения
Конкретная геометрическая задача привела нас к необходимости решить уравнение $x^2 + 2x - 8 = 0$. Как мы поступили?	Пусть необходимо решить уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$. Как мы поступим?
1) Мы представили уравнение в виде $x^2 = 8 - 2x$, т. е. оставили в левой части уравнения один член второй степени, остальные члены трехчлена перенесли в правую часть	1) Мы представим уравнение в виде $ax^2 = -bx - c$, т. е. оставим в левой части уравнения один член второй степени, остальные члены трехчлена перенесем в правую часть
2) В одной системе координат построили графики (Γ_1, Γ_2) соответственно функций f_1 и f_2: $y = x^2$ и $y = 8 - 2x$	2) В одной системе координат построим графики (Γ_1, Γ_2) соответственно функций f_1 и f_2: $y = ax^2$ и $y = -bx - c$
3) Нашли пересечение графиков (параболы и прямой): а) в первой задаче парабола и прямая пересекаются в двух точках $A(-4; 16)$ и $B(2; 4)$. При $x = -4$ и $x = 2$ соответствующие значения выражений x^2 и $8 - 2x$ равны, поэтому -4 и 2 являются корнями уравнения $x^2 = 8 - 2x$, а следовательно, и уравнения $x^2 + 8x - 2 = 0$ (рис. 31, *а*) б) если все описанное выполним для уравнения $x^2 - 2x + 1 = 0$, то получим единственную точку $A(1; 1)$, общую для прямой и параболы (прямая касается в этой точке параболы) и единственный корень $x = 1$ уравнения $x^2 - 2x + 1 = 0$ (рис. 31, *б*) в) если все описанное выполнить для уравнения $x^2 + 2x + 2 = 0$, то обнаружим, что парабола и прямая не имеют общих точек, а следовательно, уравнение $x^2 + 2x + 2 = 0$ не имеет корней (вещественных) (рис. 31, *в*)	3) Исследуем все случаи взаимного расположения прямой и параболы: а) если парабола и прямая пересекаются в двух точках $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то абсциссы этих точек x_1 и x_2 являются корнями уравнения $ax^2 = -bx - c$ или уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Какие еще могут быть случаи пересечения параболы и прямой? б) если прямая касается параболы в одной точке $A(x_1, y_1)$, то x_1 будет единственным корнем уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ (рис. 31, *б*) в) если прямая и парабола не имеют общих точек, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней (вещественных) (рис. 31, *в*)

Как же целесообразно строить методику обучения? Как подвести итоги решения частных задач таким образом, чтобы «подтолкнуть» учащихся к открытию общего метода (алгоритма) решения любой задачи рассматриваемого

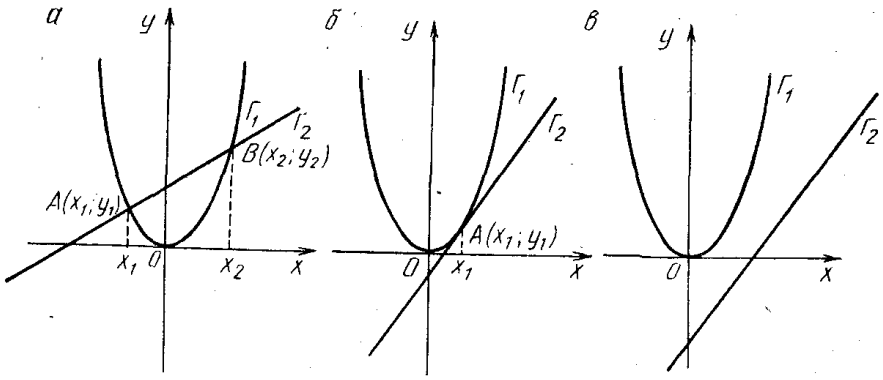


Рис. 31

класса? Это подведение итогов можно сочетать с обобщением метода так, как показано в табл. 10.2.

Каков наиболее ответственный момент в данном процессе обобщения? Этот вопрос возникает перед учителем, и правильный ответ на него способствует успешному завершению процесса. Очевидно, что таким моментом является *выделение трех (полной совокупности) возможных случаев:*

а) $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)\}$;
б) $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{A(x_1; y_1)\}$;
в) $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$.

Для того чтобы подвести учащихся к открытию этих трех случаев, необходимо предварительно решить графическим способом три конкретных уравнения, приводящих к ним. При этом следует учитывать, что, приступая к графическому решению квадратного уравнения, удобно предварительно разделить все его члены на первый коэффициент (если, разумеется, он отличен от 1). После такого обобщения можно составить схему (рис. 32).

Приведенная схема алгоритма является итогом изучения вопроса и одновременно средством наглядности, способствующим прочному усвоению общего метода решения задач данного класса.

Составление подобных схем в качестве итога изучения определенного класса задач представляет собой упражнение с важными дидактическими и развивающими функциями.

4.2. Рассмотрим в общем виде переход от решения частных задач некоторого класса K к описанию алгоритма для решения любой задачи этого класса, используя при этом в качестве иллюстрации класса задач пример:

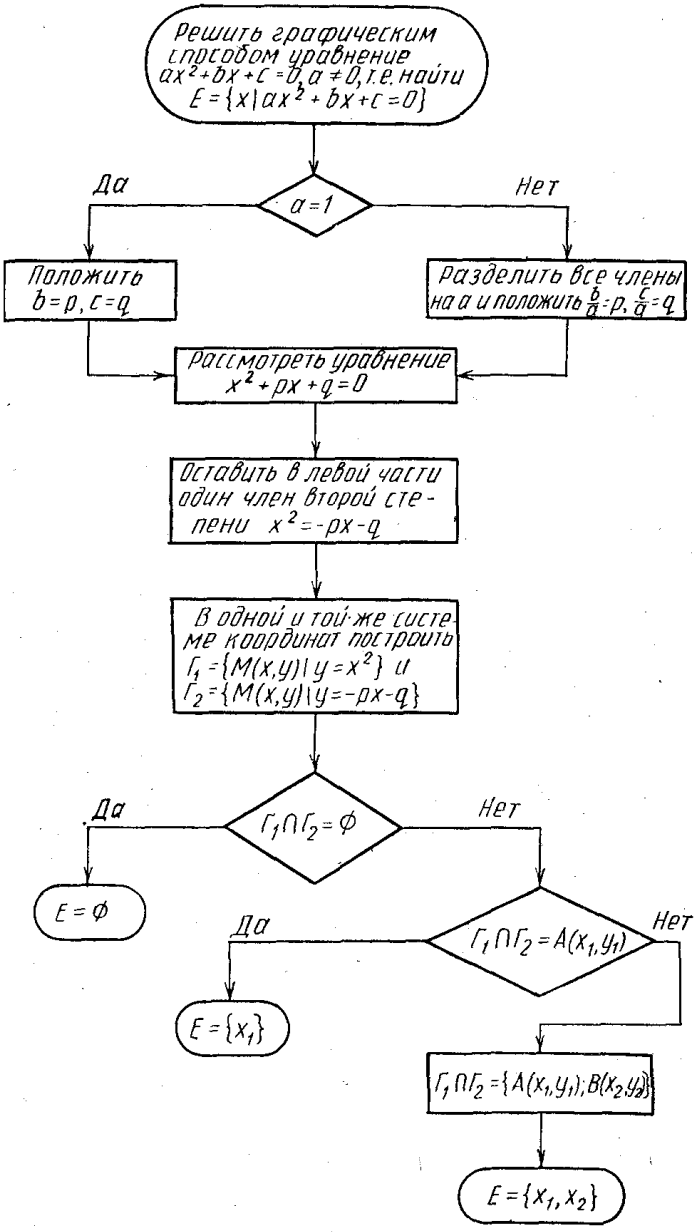

Решить графическим способом уравнение $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$, т.е. найти $E=\{x \mid ax^2+bx+c=0\}$
Да
$a=1$
Нет
Положить $b=p, c=q$
Разделить все члены на a и положить $\frac{b}{a}=p, \frac{c}{a}=q$
Рассмотреть уравнение $x^2+px+q=0$
Оставить в левой части один член второй степени $x^2=-px-q$
В одной и той же системе координат построить $\Gamma_1=\{M(x,y) \mid y=x^2\}$ и $\Gamma_2=\{M(x,y) \mid y=-px-q\}$
Да
$\Gamma_1 \cap \Gamma_2=\phi$
Нет
$E=\phi$
Да
$\Gamma_1 \cap \Gamma_2=A(x_1,y_1)$
Нет
$E=\{x_1\}$
$\Gamma_1 \cap \Gamma_2=\{A(x_1,y_1);B(x_2,y_2)\}$
$E=\{x_1,x_2\}$

Рис. 32

«Решить уравнение

$$ax=b». \qquad (1)$$

Пусть задачи класса K могут иметь несколько типов результатов: P_1, P_2, ..., P_n. Например, задачи класса (1) могут иметь три различных типа результатов: P_1 — единственное решение; P_2 — отсутствие решений; P_3 — бесконечное множество решений.

Во множестве K задач установим отношение эквивалентности ($\sim$) следующим образом: две задачи будем считать эквивалентными, если типы их результатов совпадают.

Обозначим через $P(З)$ тип результата задачи $З$. Тогда

$$З_1 \sim З_2 \Leftrightarrow P(З_1) = P(З_2).$$

В примере (1) частные задачи «Решить уравнение $4x=12$» и «Решить уравнение $-2x=$» эквивалентны, так как имеют результаты одного типа (хотя корни этих уравнений различны, каждое из них имеет точно один корень и в обоих случаях этот корень находится одним и тем же способом, с помощью одного и того же действия).

Совершенно очевидно, что введенное отношение $\sim$ является отношением эквивалентности (так как оно определяется через отношение $=$, являющееся таковым же), и поэтому приводит к разбиению множества K задач на классы эквивалентности (подклассы K), причем число этих классов равно числу различных типов результатов. В примере (1) получаем разбиение на три класса эквивалентности (K_1, K_2, K_3), определяемых соответственно условиями: $a\neq 0$; $a=0$, $b\neq 0$; $a=0$, $b=0$. Разумеется, можно и в подклассе K_1 установить отношение эквивалентности по типам результатов (целый положительный (натуральный) корень, целый отрицательный, дробный и т. д.).

Обычно возникает вопрос: сколько частных задач, в каком количестве и в какой последовательности необходимо решать, чтобы подвести учащихся к открытию общего метода решения соответствующей общей задачи (класса задач)? Для решения этой педагогической проблемы целесообразно введение некоторых понятий, которые мы относим к теории обучения решению (стандартных) задач.

Множество частных задач некоторого класса K назовем *полной системой частных задач* (ПСЧЗ) этого класса, если в нем содержится, по крайней мере, по одной задаче (по одному представителю) из каждого класса эквивалентности. ПСЧЗ является *минимальной*, если она содержит точно

по одной частной задаче (по одному представителю) из каждого класса эквивалентности. Например, множество частных задач: «Решить уравнение $2x=5$»; «Решить уравнение $2x+3=5+2x$»; «Решить уравнение $3x+7=7+3x$» — представляет собой одну из возможных минимальных ПСЧЗ класса (1).

Для достижения целей обучения, подведения учащихся к открытию алгоритма минимальная ПСЧЗ, как правило, оказывается недостаточной. Например, для анализа и обобщения способа решения задач подкласса K_1 типа «Решить уравнение

$$ax=b, \text{ где } a\neq 0», \qquad (2)$$

надо решить несколько частных задач ($2x=7$; $-3x=15$; $3x=0{,}5$; $2x=8$; $3x=0$). По существу в классе задач (2) тоже устанавливается отношение эквивалентности по знаку единственного корня уравнения или по его принадлежности к тому или иному числовому множеству.

Поэтому, естественно, возникает понятие *дидактической системы частных задач* (ДСЧЗ), которая, как правило, не является минимальной, но должна быть обязательно полной. В отличие от ПСЧЗ, которая определяется только рассматриваемым классом задач, ДСЧЗ носит прагматический характер и зависит от целей обучения и от того, кого мы обучаем, от уровня математических знаний и развития учащихся. В частности, реализация индивидуального подхода в обучении часто требует варьирования ДСЧЗ.

В отличие от ПСЧЗ, представляющей множество частных задач, ДСЧЗ — последовательность, упорядоченное множество задач, указывающее, какие частные задачи необходимо решить и в каком порядке. Поэтому две ДСЧЗ, отличающиеся только порядком элементов, следует считать различными, так как они могут привести к различным педагогическим эффектам. ДСЧЗ характеризуется тем, что выбор, число и порядок частных задач, подготавливающих переход к описанию общего метода решения, подчинен как целям обучения, так и уровню знаний и развития учащихся, и не может быть заранее определен для всех классов задач и учащихся.

Можно выделить два основных методических подхода в обучении при переходе от решения частных задач к описанию общего метода решения. *Первый* состоит в том, что с самого начала обучения решению задач определенного класса предлагается ДСЧЗ, способствующая открытию общего метода решения. Предполагается, что после решения

ДСЧЗ и соответствующего анализа учащиеся безошибочно осуществят переход к решению общей задачи, т. е. к описанию общего метода решения. Суть *второго* подхода в том, что сначала решается несколько частных задач, не составляющих полной системы. После этого учащимся предлагается общая задача, при этом предполагается, что они ошибутся. Затем им даются новые частные задачи (дополняющие уже решенные до полной системы), которые раскрывают допущенную ошибку и помогают правильно описать общий метод решения.

Иными словами, первый подход обеспечивает безошибочный переход от решения частных задач к описанию общего метода решения, второй ведет учащихся к этой же цели, причем используются допущенные учащимися ошибки.

Отметим, что умение осуществлять переход от решения частных задач к описанию алгоритма для решения класса задач (общей задачи) важно, в частности, для специалистов, работающих с ЭВМ. И именно школа должна прививать учащимся такое умение (хотя бы для простейших классов стандартных задач, решаемых в школьном курсе математики). Решение данной педагогической проблемы требует надежной методики и хорошей подготовки учителя.

11. ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ. МЕТОДЫ ПОИСКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Два подхода к решению задач

1.1. Под задачей будем понимать нестандартную задачу, т. е. задачу, которую нельзя отнести к какому-нибудь классу алгоритмически разрешимых задач. В процессе решения задач можно выделить два существенных составных элемента: а) представление (описание) задачи; б) поиск решения.

Если задача сформулирована не на математическом языке, например прикладная задача, то представление задачи включает ее перевод на язык математики. Такой перевод может быть различным. От способа представления задачи зависит и поиск ее решения. Более удачное представление способствует сокращению объема поиска, менее удачное может значительно увеличить объем поиска, усложнить процесс решения.

Основным элементом процесса решения задачи является поиск. В одном случае поиск может служить нахождению всех решений, в другом — одного из решений (наиболее

короткого, рационального, достаточно хорошего, любого), в третьем — установлению возможности или невозможности решения.

Представление задачи и поиск ее решения существенно зависят от общего подхода к решению задач. Рассмотрим два подхода к решению задач. *Первый* подход характеризуется *представлением задачи в пространстве состояний, второй — сведением (редукцией) задачи к совокупности (или к альтернативным совокупностям) подзадач.* Второй подход является более общим и находит более широкое применение, в том числе к решению задач на доказательство, хотя и первый подходит для решения некоторых типов школьных задач, встречающихся особенно в курсе алгебры (тождественное преобразование алгебраических выражений и др.).

Для эффективного использования этих подходов в школьном обучении необходима некоторая теоретическая и практическая подготовка в данной области.

2. Представление задач и методы поиска в пространстве состояний

2.1. С представлением задачи в пространстве состояний связаны следующие понятия: состояние, в том числе начальное, целевое; описание состояния; оператор, преобразующий одно состояние в другое; пространство состояний; пространство поиска.

Разъясним эти понятия на примере следующей задачи: имеем три множества орехов: 11, 7, 6 штук. Требуется переложить орехи так, чтобы в каждой кучке их стало поровну. Добавлять можно лишь столько орехов, сколько их там уже есть. Какое минимальное число перекладываний понадобится?

Начальное состояние — представление данных задачи (множества орехов). Однако нас интересует лишь число орехов в каждой кучке. Поэтому мы фактически пользуемся не самим состоянием, а его *описанием* в виде некоторого математического объекта. В нашей задаче удобно в качестве описания начального состояния принять тройку чисел (11; 7; 6), обозначающих число орехов в каждой кучке.

В дальнейшем, говоря «состояние», будем иметь в виду описание состояния. В таком случае *целевым состоянием* (к которому мы стремимся, решая эту задачу) будет тройка (8; 8; 8).

Операторами, преобразующими одно состояние в другое, в нашей задаче являются допустимые ее условиями пе-

рекладывания орехов из одной кучки в другую. Так, к начальному состоянию применимы три оператора, преобразующие его в одно из следующих состояний: или (4; 14; 6), или (5; 7; 12), или (11; 1; 12).

К состоянию (4; 14; 6) опять применимы три оператора (исключая, разумеется, тот, который возвращает его в начальное состояние), порождающие соответственно состояния (8; 10; 6), (4; 8; 12), (8; 14; 2). Множество состояний, неявно заданное начальным состоянием и всевозможными операторами, называется *пространством состояний.*

Поиск решения, т. е. поиск пути от начального состояния к целевому (в нашей задаче (11; 7; 6) — (8; 8; 8)), состоит в явном построении части пространства состояний, называемой *пространством поиска* или *пространством перебора.*

Совершенно очевидно, что чем более рационален метод поиска, тем меньше пространство поиска, а следовательно, меньше объем поиска, тем быстрее поиск приводит к решению. Минимальное из всех возможных пространство поиска определяет *оптимальный* способ решения.

2.2. Различают два класса методов поиска: 1) методы *слепого поиска* (или слепого перебора), не учитывающие заложенную в задаче эвристическую информацию; 2) методы *упорядоченного поиска* (или упорядоченного перебора, или эвристического поиска), учитывающие эту информацию.

Слепой поиск, метод проб и ошибок часто встречается в практике решения задач учащимися, так как отражает естественный ход мысли в процессе решения задач и не требует особых предварительных рассуждений. Принимая концепцию обучения математике, как обучения особого рода деятельности, мы допускаем право ученика на ошибку, особенно в процессе поиска, признаем необходимость анализа ошибочных путей. Перебор различных вариантов и их оценка с точки зрения достижения цели есть составная часть процесса мышления при решении задач.

Наглядно процесс поиска в пространстве состояний удобно представить графом. Язык графов чрезвычайно полезен для описания эффективных стратегий поиска.

Начальная вершина изображает начальное состояние (т. е. описание начального состояния). Вершины, непосредственно следующие за данной, получаются в результате применения всевозможных операторов. Процесс применения операторов к данной вершине называют *раскрытием* этой вершины. *Стрелки,* исходящие из данной вершины,

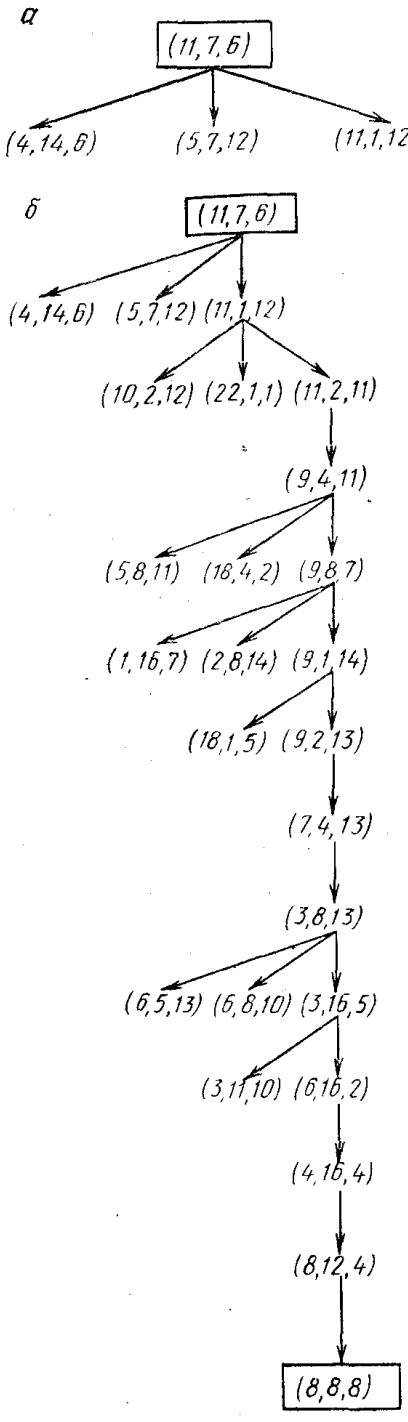


Рис. 33

указывают, какие вершины получены в результате раскрытия данной.

При раскрытии каждой вершины проверяется, нет ли среди полученных новых (дочерних) вершин целевой (изображающей целевое состояние). Если целевая вершина найдена, поиск прекращается, а указанный стрелками путь от начальной вершины к целевой изображает решение задачи. Если же целевая вершина не найдена, поиск продолжается.

Для наглядного представления методов поиска можно ограничиваться *деревьями*, т. е. связными графами без циклов (замкнутых цепей), в которых каждая вершина имеет точно одну непосредственно предшествующую ей (родительскую) вершину, за исключением одной выделенной вершины (*корень* дерева), не имеющей предшествующих вершин и служащей начальной вершиной. На дереве путь от корня (начальной вершины) до любой данной вершины единствен.

Последовательность операторов от начального состояния к целевому образует *решающую последовательность*.

2.3. Метод поиска в пространстве состояний определяется порядком, в котором раскрываются вершины. Если этот порядок не зависит от расположения целевой вершины, он приводит к одному из методов слепого перебора.

Проиллюстрируем два метода слепого поиска на примере приведенной задачи, при этом начальная часть графа поиска выглядит так, как на рис. 33, *а*.

Перебор выполнен в определенной последовательности: из 11 орехов можно переложить 7 во вторую кучку или 6 в третью; из 7 орехов можно переложить 6 в третью кучку. Других вариантов (операторов, применимых к начальному состоянию) нет.

Так мы раскрыли начальную вершину графа. Далее раскрываем последнюю из полученных дочерних вершин, затем опять последнюю из вновь образовавшихся и т. д. Избегаем повторения вершин, так как это не приводит к новым результатам. Тройки, отличающиеся только порядком элементов, будем считать одинаковыми. Вершины, приводящие только к повторным результатам, являются неперспективными, и мы их закрываем, т. е. прекращаем их раскрытие.

Раскрывая каждый раз последнюю из образовавшихся вершин, мы применяем один из методов слепого перебора — *метод перебора в глубину* (обычно еще задается максимальная глубина перебора). В результате получаем граф поиска (рис. 33, *б*). Однако нет никакой уверенности в том, что найденный путь определяет требуемое условиями задачи минимальное число перекладываний орехов.

Применяя другой метод слепого перебора *(метод полного перебора)*, характеризующийся тем, что вершины раскрываются в том порядке, в котором они порождаются, получаем граф поиска, изображенный на рис. 34. Поиск прекращаем, как только появляется целевая вершина. Если бы в задаче требовалось найти все варианты решения, то пришлось бы продолжать перебор до тех пор, пока не были бы исчерпаны все перспективные вершины.

Как видно (см. рис. 33, *б*; рис. 34), в нашей задаче ме-

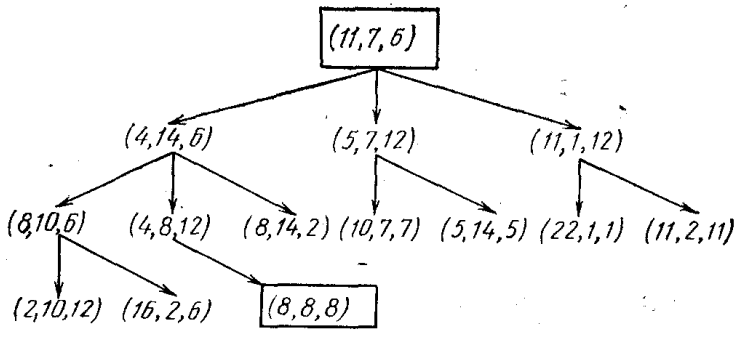


Рис. 34

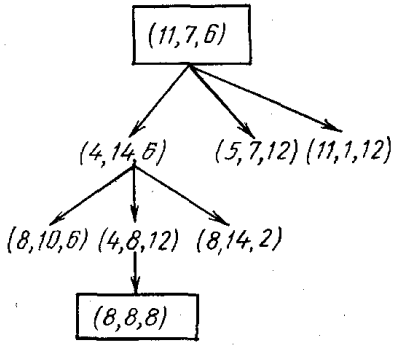


Рис. 35

тод полного перебора по сравнению с методом перебора в глубину потребовал поиска намного меньшего объема и дал требуемое решение.

В противоположность методам слепого поиска метод упорядоченного перебора использует эвристическую информацию, заложенную в задаче. При раскрытии начальной вершины нетрудно заметить, что дочерняя вершина (4; 14; 6) наиболее перспективна, так как дает возможность получить множество из 8 орехов. Поэтому остальные вершины, находящиеся с этой в одной строчке, уже не раскрываем. Затем более перспективной будет вершина (4; 8; 12), непосредственно ведущая к цели. Дерево упорядоченного перебора изображено на рис. 35.

Как видно, дерево упорядоченного поиска содержит всего 8 вершин, включая начальную и целевую, дерево перебора в глубину — 26, дерево полного перебора — 14.

В качестве второго примера для иллюстрации методов слепого и упорядоченного перебора рассмотрим задачу: «Доказать тождество $\frac{1}{\cos x} - \sin x \operatorname{tg} x = \cos x$». В данной задаче описания состояний можно отождествить с самими состояниями. Начальное состояние: $\frac{1}{\cos x} - \sin x \operatorname{tg} x$. Целевое состояние: $\cos x$. Раскроем начальную вершину (рис. 36, *а*).

Продолжим поиск решения методом перебора в глубину, т. е. раскрывая каждый раз последнюю из образовавшихся дочерних вершин (рис. 36, *б*).

Мы определили один из возможных путей решения. Если надо найти несколько вариантов для выбора наиболее рационального, то следует вернуться к последней из оставшихся перспективных вершин и т. д. В данном случае необходимо раскрыть вершину $(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x)/\cos x$:

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x} \to \frac{\cos^2 x}{\cos x} \to \cos x.$$

Выполняя поиск доказательства данного тождества методом полного перебора, т. е. раскрывая вершины в том порядке, в каком они получены, получим граф поиска (рис. 37),

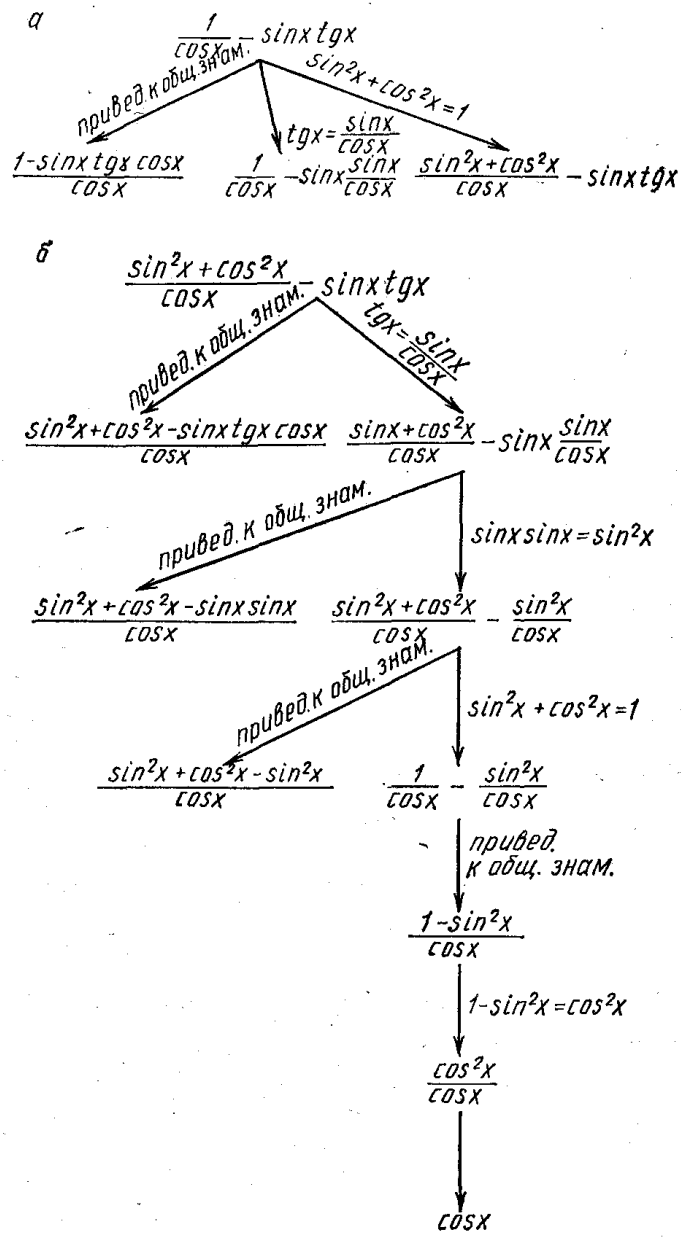


Рис. 36

на котором наиболее перспективный путь решения выделен жирной линией.

Если бы мы пожелали найти все способы решения, то одинаковые вершины не следовало бы опускать. Например, раскрыв некоторые вершины в последнем ряду, мы получи-

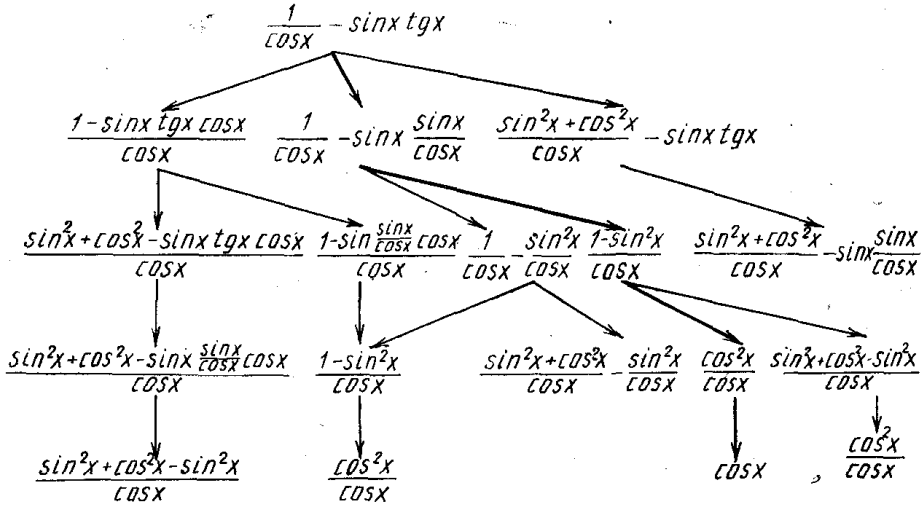


Рис. 37

ли бы еще два равноценных решения, хотя пути достижения цели не были бы одинаковыми.

Поиск решения методом упорядоченного перебора сразу привел бы нас к пути, выделенному на рис. 37. Все остальные пути мы сразу же опускали бы как неперспективные. Например, из $\frac{1}{\cos x} - \sin x \operatorname{tg} x$ следовало бы лишь $\frac{1}{\cos x} - \sin x \frac{\sin x}{\cos x}$, так как в данном случае появляется возможность записи общего знаменателя и использования тождества $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$.

Дерево упорядоченного перебора (в горизонтальном расположении) выглядит так:

$$\frac{1}{\cos x} - \sin x \operatorname{tg} x \to \frac{1}{\cos x} - \sin x \frac{\sin x}{\cos x} \to \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x} \to$$

$$\to \frac{\cos^2 x}{\cos x} \to \cos x.$$

Может казаться, что в обычной практике мы решаем подобные задачи проще, чем изображено на графах поиска. Это действительно так лишь в тех случаях, когда сразу *догадываются*, как их решить кратчайшим путем. К тому же обычно выполняется одновременно несколько действий, от чего путь кажется еще короче. Например, приведенный

кратчайший путь доказательства тождества на практике может выглядеть так:

$$\frac{1}{\cos x} - \sin x \operatorname{tg} x = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x}{\cos x} = \cos x.$$

Однако чаще догадка приходит не сразу, а если учесть все попытки решения, которые обычно не указываются, то объем поиска может выглядеть еще более внушительным.

Одно бесспорно: необходимо учить регулярным методам поиска, в том числе использованию эвристической информации, заложенной в задаче, т. е. упорядоченному (эвристическому) поиску. Как это сделать? Главным образом на конкретных примерах, на образцах, с последующим анализом примененных методов и приемов.

3. Сведение задач к подзадачам

3.1. Более общий подход к решению задач основан на сведении (редукции) задачи к подзадачам. Он используется при решении широкого круга задач, в том числе и такого *важного класса задач, как задачи на доказательство.*

Идея такого подхода состоит в «размышлении в обратном направлении» — от задачи, которую предстоит решить, к подзадачам, решение которых необходимо для решения исходной задачи, затем от подзадач к подподзадачам и так далее до тех пор, пока исходная задача не будет сведена к набору *элементарных* задач.

Под элементарными задачами будем понимать, во-первых, задачи, решаемые «с помощью одного действия», и, во-вторых, более сложные задачи, решение которых нам уже известно из имеющегося опыта решения задач. Отсюда можно заключить, что чем больше опыт решения задач, тем шире круг задач, которые становятся для нас «элементарными» в упомянутом смысле, тем меньше объем поиска при сведении новых задач к элементарным.

При сведении задачи к подзадачам описание задачи преобразуется в множество описаний подзадач таким образом, что решение всех подзадач обеспечивает решение исходной задачи. Для одной задачи может существовать много способов сведения. Применение их порождает альтернативные множества подзадач. Некоторые из таких подзадач могут оказаться неразрешимыми, так что нам приходится перепробовать другие способы сведения, чтобы построить множество подзадач, все элементы которого разрешимы. Для этого необходим поиск.

Процесс сведения задачи к альтернативным множествам подзадач можно наглядно представить с помощью так называемого **и/или**-графа. Изображенный на рис. 38 с помощью такого графа процесс сведения задачи A к подзадачам состоит в следующем. Для решения задачи A достаточно решить одну из задач B или C (B и C называются **или**-вершинами либо вершинами типа **или** этого графа). Для решения задачи B необходимо решить задачи D и E (D и E называются **и**-вершинами или вершинами **и**). Такого же типа являются вершины F, G, H, K, L (стрелки, ведущие к **и**-вершинам, соединены дугой). Вершины же M и P являются **или**-вершинами (для решения задачи H достаточно решить одну из задач M или P).

Граф типа **и/или** оказывается подходящей структурой для моделирования процесса редукции задач и может быть использован в обучении как наглядное представление процесса поиска, особенно при обучении сведению задачи к подзадачам по образцам.

Изображенный на рис. 38 **и/или**-граф наглядно представляет два способа решения задачи A. Каждый из этих способов состоит в решении последовательности подзадач, начиная с конечных вершин, изображающих элементарные задачи ($KLEDBA$ или $MHGFCA$).

3.2. Подход, основанный на сведении задачи к подзадачам, в литературе по методике преподавания математики часто называют анализом при решении задач (чаще всего арифметических). При этом решение задачи осуществляют, продвигаясь в обратном направлении, что иногда (не совсем удачно) называют *синтезом решения*.

Рассмотрим две задачи (арифметическую и геометрическую).

З а д а ч а 1. Тракторная бригада вспахала за три дня 250 га. В первый день она вспахала 36% всей площади, а во второй 34%. Какую площадь бригада вспахала за третий день?

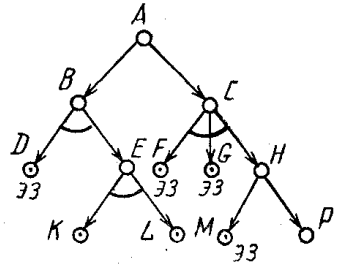


Рис. 38

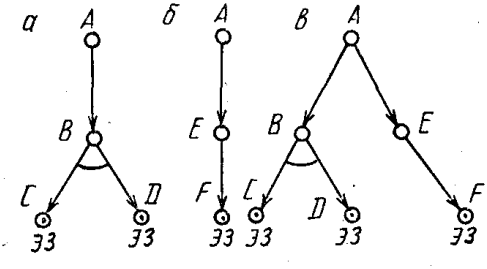


Рис. 39

Рассмотрим *первый способ* — сведение задачи к подзадачам. Чтобы ответить на вопрос, надо знать, какую площадь вспахала бригада за три дня (это дано) и какую — за два первых дня (это — подзадача B, которую надо решить, чтобы выполнить исходную задачу A). Чтобы узнать, какую площадь вспахала бригада за два первых дня вместе, т. е. чтобы решить задачу B, надо знать, какую площадь вспахала бригада за первый и второй день отдельно, т. е. надо решить две подзадачи: C — узнать, какую площадь вспахала бригада за первый день; D — определить, какую площадь вспахала бригада за второй день. Эти задачи элементарные, так как решаются с помощью одного действия (или известного алгоритма) и данных, содержащихся в условии задачи (найти соответственно 36 и 34% от 250).

Граф, представляющий данное действие (рис. 39, *а*), состоит из одних и-вершин.

Возможен *второй способ* сведения задачи A к подзадачам (рис. 39, *б*), где подзадача E формулируется так: «Сколько процентов всей площади вспахали за третий день?», а задача F так: «Сколько процентов всей площади вспахали за первый и второй дни вместе?». Последняя задача элементарная, так как решается одним действием с помощью данных, содержащихся в условии исходной задачи A.

Объединив две схемы анализа, получим граф сведения задачи A к альтернативным совокупностям подзадач (рис. 39, *в*), изображающий наглядно два способа решения задачи A.

З а д а ч а 2. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны и равны 3,6 дм и 6 дм. Вычислить площадь этой трапеции (рис. 40).

Дано: $ABCD$ — трапеция, $BC \parallel AD$, $AC \perp BD$, $AC = 6$ дм $BD = 3{,}6$ дм. Определить $S_{\text{трап}}$.

Введем дополнительные обозначения: $AO = x$, $OC = 6 - x$, $BO = y$, $OD = 3{,}6 - y$. Выполним дополнительное построение (см. рис. 40, штриховая линия): подвергнем отрезок BD параллельному переносу на вектор BC. Задачу можно решить несколькими способами.

На рис. 41, *а* приведен граф поиска решения предложенной задачи *одним способом*, при этом в формулировках задачи и подзадач опущено (подразумевается) слово «найти» или «опреде-

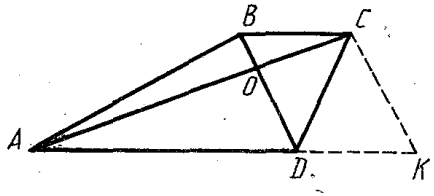


Рис. 40

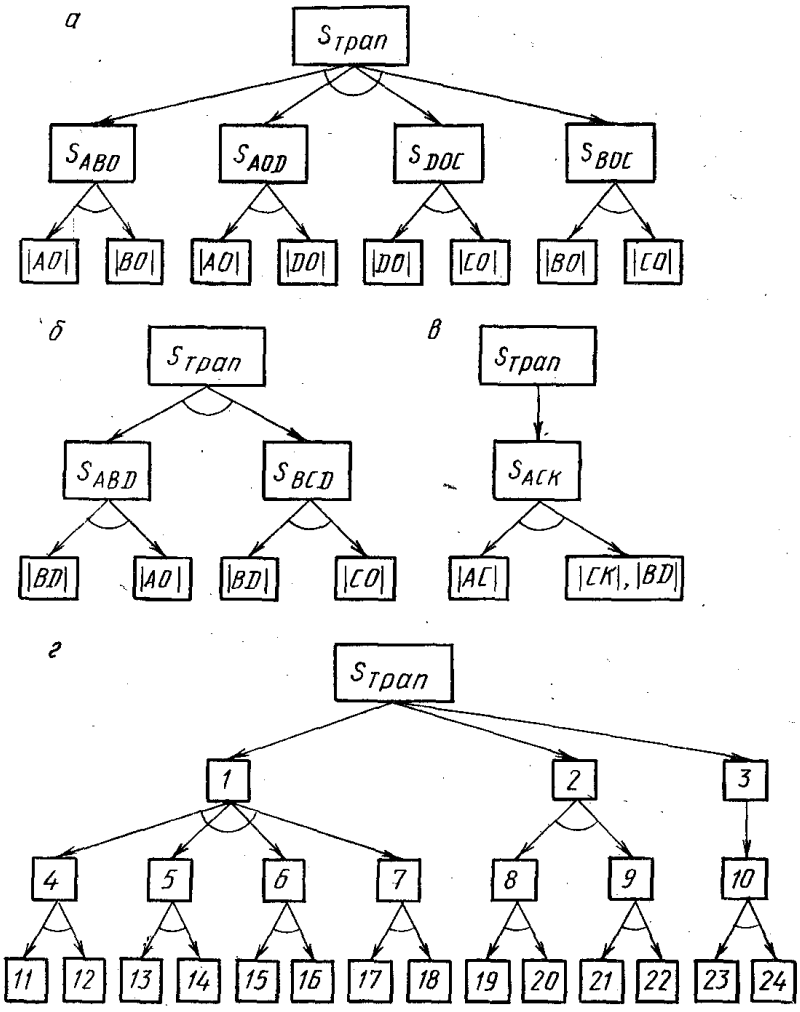


Рис. 41

лить». Этим способом решение может быть записано следующим образом:

$$S_{\text{трап}} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO + \frac{1}{2} \cdot AO \cdot DO + \frac{1}{2} \cdot DO \cdot CO +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot CO \cdot BO = \frac{1}{2} (xy + x\,(3{,}6 - y) + (3{,}6 - y)\,(6 - y) +$$

$$+ (6 - x)y) = \frac{1}{2} \cdot 21{,}6 = 10{,}8 \text{ дм}^2.$$

Другой способ решения, в котором используются треугольники ABD и BCD, изображен на рис. 41, *б*:

$$S_{\text{трап}} = \frac{1}{2} \cdot 3{,}6\,(6 - x) + \frac{1}{2} \cdot 3{,}6x = 1{,}8 \cdot 6 - 1{,}8x + 1{,}8x =$$

$$= 10{,}8 \text{ дм}^2.$$

Аналогичный способ, в котором используются треугольники ABC и ADC, опускаем.

Наиболее рациональный способ (рис. 41, *в*) требует догадки: надо «увидеть» равновеликость трапеции $ABCD$ и полученного в результате дополнительного построения треугольника ACK. Еще важнее увидеть необходимость такого построения, чтобы образовать прямоугольный треугольник с известными катетами, равновеликий трапеции, площадь которой и требуется найти:

$$S_{\text{трап}} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CK = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3{,}6 = 10{,}8 \text{ дм}^2.$$

На рис. 41, *г* изображен граф сведения рассматриваемой задачи к альтернативным совокупностям подзадач, полученный путем объединения графов, изображенных на рис. 41 с соответствующей нумерацией задач.

Несмотря на различия между арифметической и геометрической задачами, к их решению применен один и тот же подход — сведения задачи к совокупности (или альтернативным совокупностям) подзадач. Использование этого подхода наиболее характерно при решении геометрических задач на доказательство.

4. Алгоритм поиска доказательства

4.1. Геометрические задачи на доказательство представляют собой класс задач типа «доказать предложение P», где P — предложение, сформулированное на языке геометрии. Уточним постановку задач этого класса.

«Доказать предложение P» означает построить доказательство этого предложения, устанавливающее его истинность, как следствие уже известных истинных геометрических предложений (аксиом, ранее доказанных теорем или предложений, истинных в силу определений).

Обозначим через Γ совокупность уже известных учащимся (к моменту предъявления им задачи «доказать предложение P») истинных геометрических предложений. Иными словами, Γ — уже изученный фрагмент геометрической

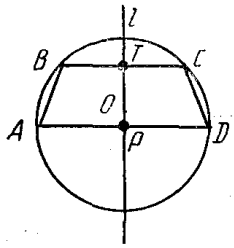


Рис. 42

теории, включающий некоторые аксиомы, определения и теоремы. В данном случае задачу «Доказать предложение P» можно переформулировать так: «Установить следование P из Γ». Обозначим задачи этого типа следующим образом:

$$\Gamma \overset{?}{\Rightarrow} P.$$

Часто доказываемые предложения представляются в импликативной форме («если A, то P», где A — условие, а P — заключение), т. е. в виде предложения, истинность которого в рамках геометрической теории предстоит установить при истинности условия A. В таком случае A считается одной из истинных посылок, т. е. включается в Γ.

4.2. Покажем и наглядно изобразим с помощью графов процесс сведения задачи к подзадачам.

З а д а ч а 1. Доказать, что любая трапеция, вписанная в окружность, равнобедренная (рис. 42).

В Γ включаем условия: $ABCD$ — трапеция; $ABCD$ вписана в окружность. При этих условиях доказываемое предложение P: $ABCD$ — равнобедренная трапеция.

Обычно, начиная поиск доказательства некоторого предложения, мы выделяем в памяти (или, как говорят психологи, актуализируем) те знания, известные нам истинные геометрические предложения (из Γ или различные следствия из Γ), которые определенным образом связаны с содержанием доказываемого предложения и могут оказаться полезными в поиске доказательства.

Эта составная часть процесса поиска доказательства весьма ответственна и ее осуществление зависит от знаний и опыта решающего задачу. Ученик, лучше владеющий материалом (Γ) и имеющий большой опыт решения задач данного класса, быстрее выделит из Γ то, что действительно необходимо для искомого доказательства. Более слабый ученик сделает это медленнее, а порой воспользуется такой совокупностью вспомогательных предложений, которая заведет его в тупик, и поиск закончится неудачей.

Возникающие здесь трудности нельзя устранить каким-нибудь предписанием алгоритмического типа, пригодным для любой задачи рассматриваемого класса и гарантирующим успех. Общая рекомендация выявить те из уже известных геометрических фактов, которые определенным образом связаны с условием доказываемой теоремы, под-

сказывает мало (к тому же можно по-разному истолковать выражение «определенным образом связаны»).

В обычной практике доказательства совокупность M выделяемых предложений фиксируется лишь в памяти, но не записывается. В целях обучения поиску доказательства мы должны на некоторых примерах записывать выделяемую совокупность M предложений и показать, что означает «определенным образом связаны» и как эти предложения используются в процессе сведения задачи к подзадачам.

Для нашей задачи можно выделить следующую совокупность предложений (доказательство каждого из предложений можно считать элементарной задачей):

P_1: $AB = CD \Rightarrow ABCD$ — равнобедренная трапеция;

P_2: $\overset{\smile}{AB} = \overset{\smile}{CD} \Rightarrow AB = CD$;

P_3: $ABCD$ — трапеция $\Rightarrow BC \parallel AD$ (см. рис. 42;)

P_4: $BC \parallel AD$ **и** BC, AD — хорды $\Rightarrow \overset{\smile}{AB} = \overset{\smile}{CD}$.

Предложения можно записать и в ином порядке.

Чтобы доказать, что трапеция $ABCD$ равнобедренная, надо доказать, что отрезки AB и CD равны. Следовательно, исходная задача сводится к двум подзадачам: доказать, что трапеция равнобедренная, исходя из данных посылок Γ, дополненных новой посылкой $AB = CD$ (задача *(а)*); доказать равенство отрезков AB и CD исходя из данных посылок Γ (задача *(б)*). На рис. 43, *а* изображено начало графа сведения задачи к подзадачам (*ЭЗ* — элементарная задача).

Но задача *(а)* элементарна, решается одним шагом — ссылкой на предложение P_1. Следовательно, в поиске доказательства надо далее раскрывать лишь вершину *(б)*.

Чтобы доказать равенство отрезков AB и CD, можно опять решить две подзадачи: доказать, что равенство этих отрезков следует из посылок Γ, дополненных равенством дуг AB и CD (задача *(в)*); доказать, что равенство этих дуг следует из Γ (задача *(г)*). На рис. 43, *б* изображено продолжение графа поиска (сведения задачи к подзадачам). Но задача *(в)* элементарна, решается одним шагом — ссылкой на предложение P_2. Поэтому следует раскрывать лишь вершину *(г)*.

Чтобы доказать равенство дуг AB и CD, можно опять решить две подзадачи: доказать равенство этих дуг при дополнительных посылках $BC \parallel AD$ и BC, AD — хорды (задача *(д)*); доказать, что из Γ следуют эти посылки (задача *(е)*).

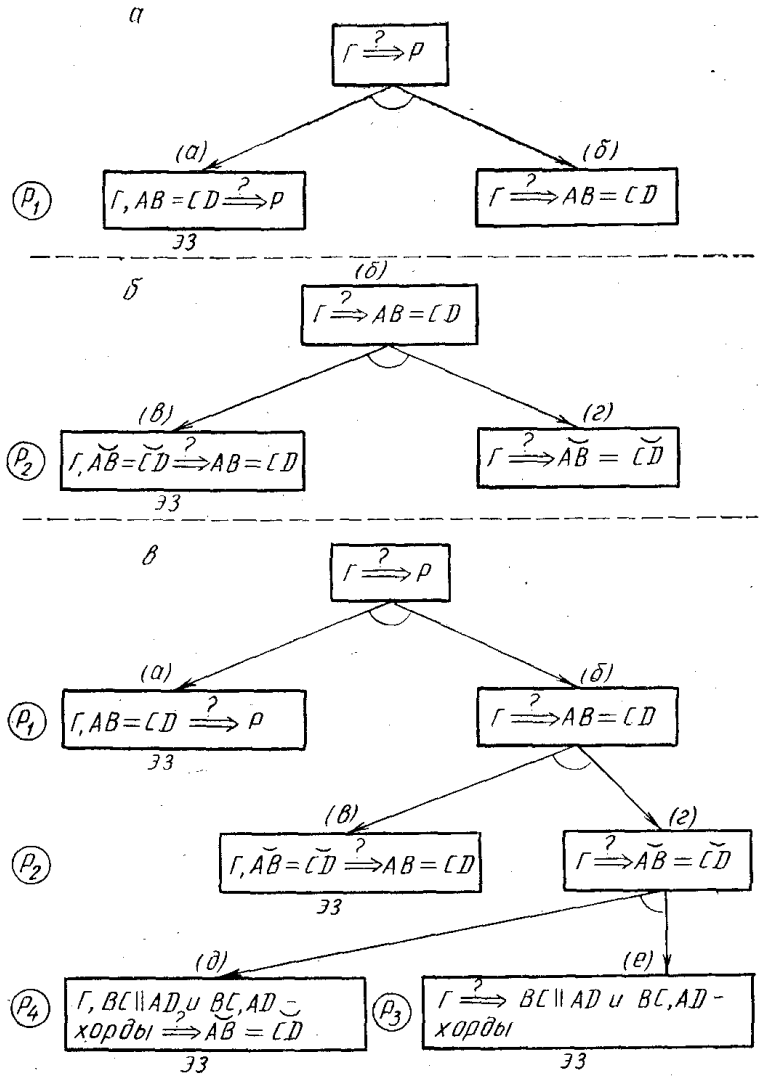


Рис. 43

Обе эти подзадачи элементарны, а именно: *(д)* — ранее решенная задача (или доказанная теорема) P_4; *(е)* — следует непосредственно из Γ (P_3).

На рис. 43, *в* изображен граф сведения исходной задачи к элементарным. Однако представленный на этом графе путь поиска доказательства не единственно возможный. Например, равенство отрезков AB и CD (подзадача *(б)*) можно свести к задаче о симметричности отрезков относительно прямой l (см. рис. 42). В этом случае вместо сово-

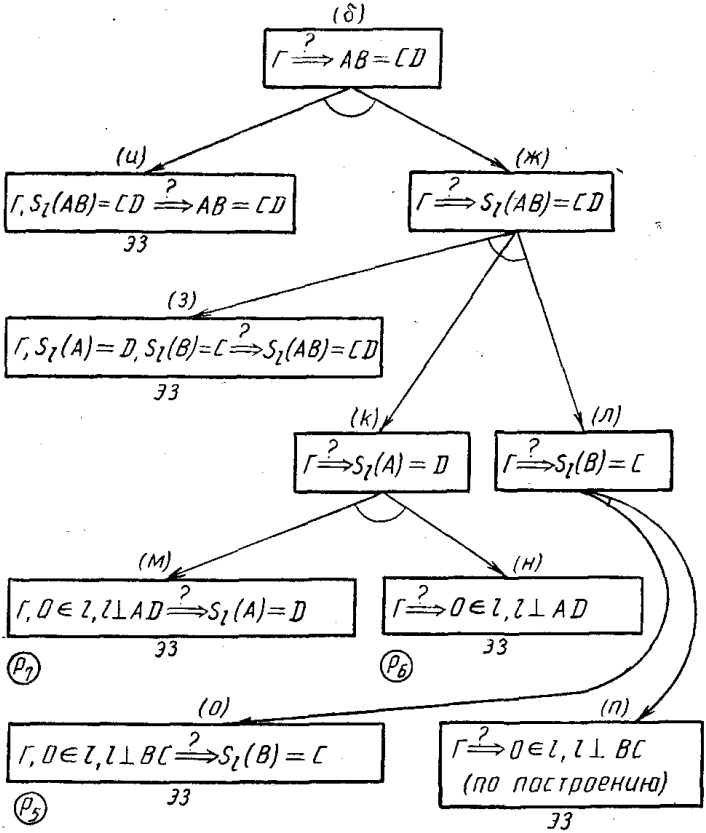

(б)
Γ ⟹? AB=CD
(ш)
Γ, S1(AB)=CD ⟹? AB=CD
ЭЗ
(ж)
Γ ⟹? S1(AB)=CD
(з)
Γ, S1(A)=D, S1(B)=C ⟹? S1(AB)=CD
ЭЗ
(к)
Γ ⟹? S1(A)=D
(л)
Γ ⟹? S1(B)=C
(м)
Γ, O∈l, l⊥AD ⟹? S1(A)=D
ЭЗ
P7
(н)
Γ ⟹? O∈l, l⊥AD
ЭЗ
P6
(о)
Γ, O∈l, l⊥BC ⟹? S1(B)=C
ЭЗ
P5
(п)
Γ ⟹? O∈l, l⊥BC
(по построению)
ЭЗ

Рис. 44

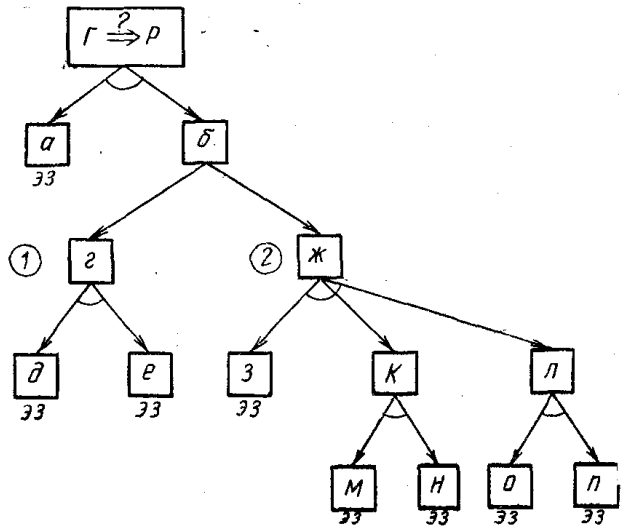

Γ ⟹? P
а
ЭЗ
б
1
г
2
ж
д
ЭЗ
е
ЭЗ
з
ЭЗ
к
л
м
ЭЗ
н
ЭЗ
о
ЭЗ
п
ЭЗ

Рис. 45

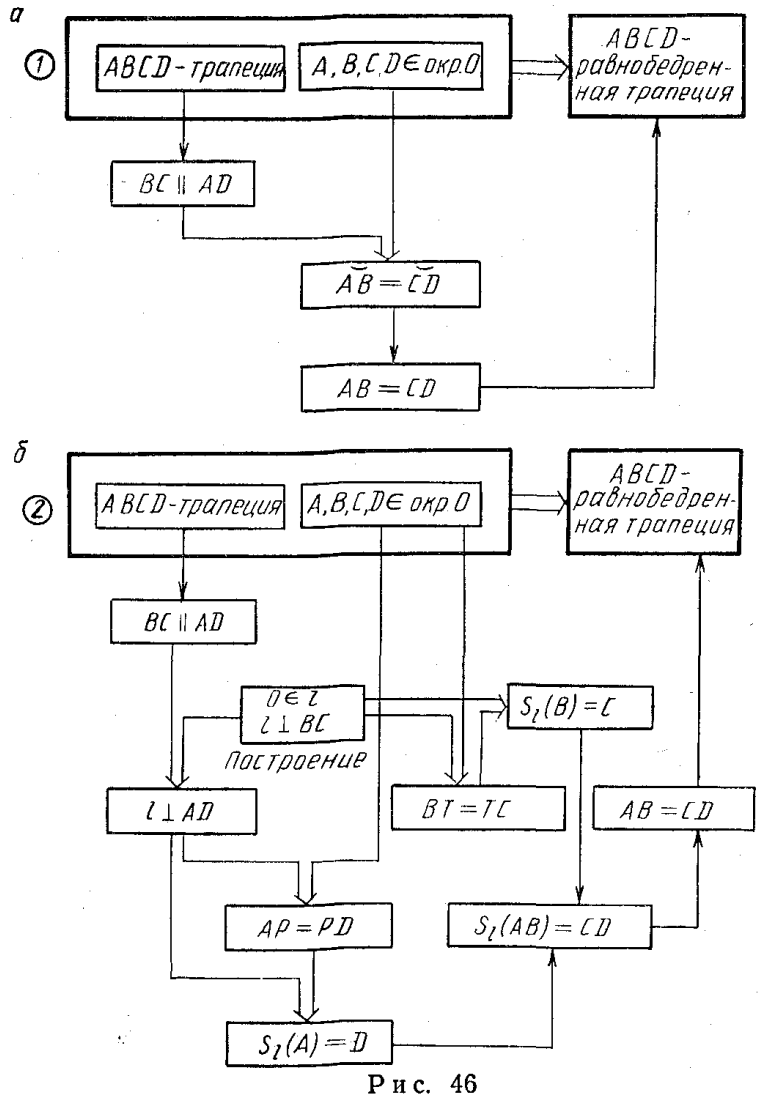


Рис. 46

купности предложений P_1—P_4 мы воспользуемся следующе совокупностью (рис. 44) (дополнительное построение: пр водим прямую l через центр O перпендикулярно к BC):

P_5: $O \in l$ **и** $l \perp BC \Rightarrow BT = TC$;
P_6: $O \in l$ **и** $l \perp BC$ и $BC \parallel AD \Rightarrow l \perp AD$;
P_7: $O \in l$ **и** $l \perp AD \Rightarrow AP = PD$.

Объединив оба способа (*1* и *2*) сведения задачи к по задачам, получаем полный **и/или**-граф поиска доказател ства (рис. 45). Если проследить два пути поиска сни

верх (по графу на рис. 45), то получим структурные схемы двух методов доказательства (рис. 46, *а, б*), наглядно показывающие, что первый из них проще второго.

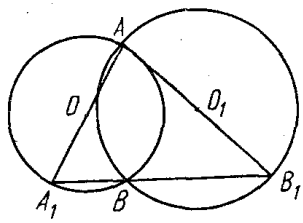


Рис. 47

Подобные структурные схемы доказательств помогают раскрыть идею и внутренние связи доказательства и одновременно являются кратким конспектом, составленным на общепонятном языке. Вершинами графа доказательства служат предложения, участвующие в доказательстве, а стрелки указывают на то, что из чего следует.

Задача 2. Две окружности пересекаются в точках A и B. Из точки A проведены диаметры окружностей AA_1 и AB_1. Доказать, что точки A_1, B, B_1 лежат на одной прямой (рис. 47).

В Γ включаем условия: окружности O и O_1 пересекаются в точках A и B; AA_1 — диаметр окружности O; AB_1 — диаметр окружности O_1. При этих условиях доказываем предложение P: $B \in A_1B_1$.

Можно выделить следующую совокупность предложений, связанных с содержанием данной задачи:

P_1: AA_1, AB_1 — диаметры и B — общая точка окружностей O и $O_1 \Rightarrow \angle ABA_1$ и $\angle ABB_1$ — вписанные углы в окружностях O и O_1 соответственно, опирающиеся на диаметры;

P_2: $\angle ABA_1$, $\angle ABB_1$ — вписанные углы, опирающиеся на диаметры $\Rightarrow \angle ABA_1 = 90°$ и $\angle ABB_1 = 90°$;

P_3: $\angle ABA_1 + \angle ABB_1 = 180° \Leftrightarrow B \in A_1B_1$.

Обратим внимание на предложение P_3, представляющее собой равносильность двух предложений, из которых одно — доказываемое ($B \in A_1B_1$). Эта равносильность позволяет переформулировать исходную задачу или заменить ее равносильной: «Доказать, что $\angle ABA_1 + \angle ABB_1 = 180°$». Применяя такую формулировку задачи, мы часто приближаем то, что надо доказать, к тому, из чего это следует. В этом по существу состоит один из принципов эвристики, известный под названием принципа *парадигмы*.

Итак, если к посылкам Γ присоединить предложение $\angle ABA_1 + \angle ABB_1 = 180°$, то из этой расширенной совокупности посылок непосредственно следует доказываемое предложение ($B \in A_1B_1$). Но тогда надо доказать, что $\angle ABA_1 + \angle ABB_1 = 180°$.

Процесс сведения данной задачи к подзадачам пред-

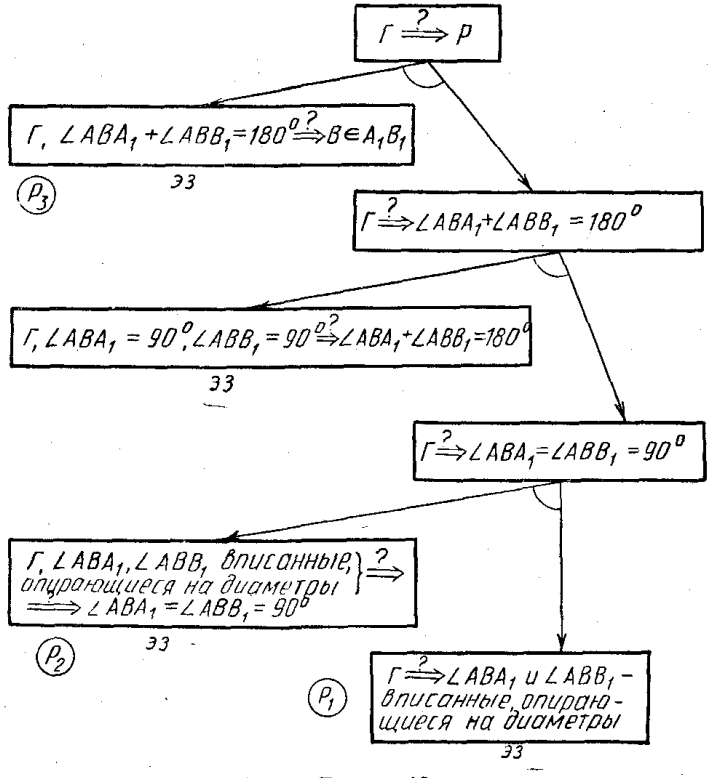


Рис. 48

ставлен на рис. 48. В обычной практике фиксируются лишь правые вершины этого графа, левые опускаются (это тривиальные, элементарные задачи), как и первые (большие) посылки в рассуждениях. И это вполне правомерно. Однако, обучая сведению задачи к подзадачам, мы должны восстановить и фиксировать не только в уме, но и на бумаге, полный граф поиска.

З а д а ч а 3. В правильном тетраэдре проведено сечение через середины трех ребер, выходящих из одной вершины. Доказать, что плоскость сечения параллельна плоскости грани, противоположной этой вершине (рис. 49).

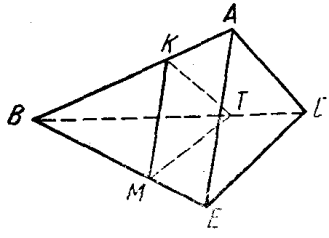


Рис. 49

В совокупность посылок Γ включаем: $ABCE$ — правильный тетраэдр, $BK=KA$, $BM=ME$, $BT=TC$. Доказываемое предложение P: $KTM \parallel ACE$.

Какие геометрические предложения, связанные с содержанием

данной задачи, необходимо вспомнить? Очевидно, признак параллельности двух плоскостей и свойство средней линии треугольника. Если эти предложения записать применительно к данной задаче (см. рис. 49):

P_1: $KM \parallel AE$ и $KT \parallel AC \Rightarrow KTM \parallel ACE$;
P_2: KM — средняя линия треугольника $ABE \Rightarrow KM \parallel AE$;
P_3: KT — средняя линия треугольника $ABC \Rightarrow KT \parallel AC$,

то вряд ли появится необходимость в поиске доказательства. Полный граф сведения задачи к подзадачам изображен на рис. 50.

Целенаправленный поиск решения задач, особенно задач на доказательство, отвечает современным психологическим концепциям интеллектуального развития, концепции обучения математической деятельности. Обучение поиску соответствует наиболее прогрессивным методам обучения — исследовательским, занимающим центральное место в системе проблемного обучения.

4.3. Итак, в трех рассмотренных задачах на доказательства использован один и тот же (хотя, разумеется, не един-

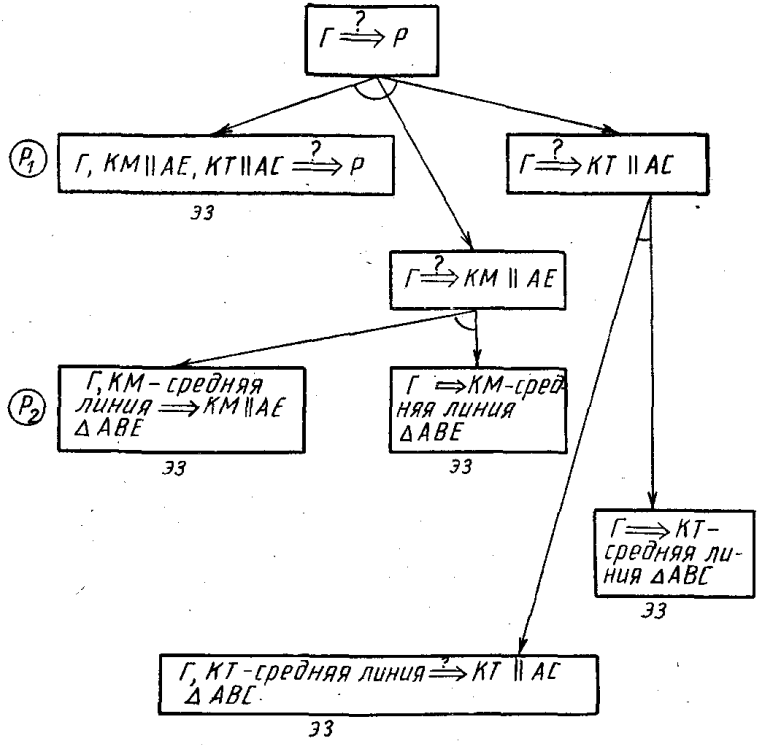


Рис. 50

ственно возможный) «алгоритм поиска». В общем виде его можно сформулировать в виде следующего предписания.

Решая задачу $\Gamma \overset{?}{\Rightarrow} P$, мы должны:

1) отобрать совокупность уже известных истинных предложений $M = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$, связанных с доказываемым предложением;

2) к посылкам Γ присоединить дополнительную посылку P_i ($P_i \in M$) так, чтобы задача Γ, $P_i \overset{?}{\Rightarrow} P$ стала элементарной. Тогда решаемая (исходная) задача сводится к двум подзадачам: а) Γ, $P_i \Rightarrow P$ (элементарная); б) $\Gamma \Rightarrow P_i$;

3) если задача «б» элементарная, т. е. решается в один шаг поиска или ее решение уже известно из имеющегося опыта, то поиск закончен. Если задача «б» не является элементарной, то поиск ее решения продолжается таким же образом (необходимо возвратиться к пункту 2 настоящего предписания, заменив в нем P на P_i, а P_i на P_j из того же множества предложений M).

Возможны два исхода поиска: успех и неудача. Успех во многом зависит от удачного отбора (обычно в уме) совокупности M предложений, связанных с доказываемым. Это творческий процесс и никаких жестких предписаний здесь нет. Данный алгоритм поиска существенно отличается от алгоритма решения стандартной задачи.

Алгоритм поиска доказательства, как и всякий алгоритм поиска, строго не детерминирует процесс поиска и обладает результативностью лишь в случае, если одним из его результатов считать неудачу. Хотя алгоритм сведения задачи к подзадачам предписывает закончить поиск при подходе к элементарным задачам, само понятие «элементарная задача», как уже указывалось, зависит от опыта решающего.

Роль алгоритма поиска доказательства состоит в организации целенаправленного поиска, а это чрезвычайно важно для обучения.

12. ОБУЧЕНИЕ МАТЕМАТИКЕ И ЛОГИЧЕСКОЕ РАЗВИТИЕ УЧАЩИХСЯ

1. Традиционное обучение и логическое развитие учащихся

1.1. Все согласны с тем, что учить означает прежде всего учить рассуждать. Но как учить рассуждать? Надо ли на определенных этапах обучения делать наши рассуждения

предметом изучения или же обычное обучение различным учебным предметам достаточно развивает умение учащихся рассуждать? По этому вопросу мнения расходятся.

Разумеется, умение рассуждать приобретается человеком не путем усвоения логических законов, на которых основаны человеческие рассуждения, а в результате жизненного опыта. Люди рассуждают, не зная этих законов, так же как они умеют разговаривать на родном языке и без знания грамматических правил этого языка. Но можно ли из последнего заключить, что бесполезно специально изучать строение родного языка, его грамматику? Очевидно, никто не сомневается в том, что одного пользования языком недостаточно и что последний должен быть предметом специального изучения. Однако в аналогичной ситуации, касающейся учения о рассуждениях (логики), такого единства мнений нет.

Во введении мы упомянули о том, что обычно математике приписывают особую роль в развитии логики мышления учащихся, так как при изучении математики приходится много тренироваться в выполнении различного рода логических выводов. Естественно возникает вопрос: принадлежит ли эта роль самой математике, независимо от метода преподавания? Приводит ли одна тренировка в логических выводах без понимания того, как мы «выводим», к требуемому развитию логики мышления учащихся?

1.2. Один из существенных недостатков традиционной методики преподавания математики состоит в том, что ученикам не разъясняется и для них остается непонятной логика изучаемого материала.

Обычно в обучении математике стремятся к устранению трудностей в понимании математического материала учащимися многократными разъяснениями и иллюстрациями собственно-математического компонента этого материала. Это делается и в тех случаях, когда причиной трудностей является непонимание его логического компонента. Такие попытки оказываются безуспешными из-за того, что они не устраняют причины непонимания.

Проведенные нами эксперименты с помощью специально составленных *логических тестов* подтвердили, что одна, пусть даже многолетняя, тренировка в выполнении простейших логических операций, выражаемых на русском языке словами «не», «и», «или», «если..., то», «если и только если», без их специального изучения не приводит к усвоению точного смысла этих операций, к необходимому логическому развитию учащихся, особенно средних и слабых.

Одни и те же логические тесты, в которых требовалось ответить «да», «нет» или «не знаю» на ряд вопросов типа «следует ли из таких-то посылок такое-то заключение» или «истинно ли высказывание...», были предложены восьмиклассникам и десятиклассникам (обучаемым по традиционной методике), студентам III курса физико-математического факультета педагогического института и учителям (не изучавшим никакие элементы логики).

Поразительное совпадение ответов, к тому же в большинстве случаев неправильных, говорит о том, что обучение математике традиционными методами, пренебрегающими логикой, не достигает существенного логического развития.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Учащиеся, обучаемые по традиционной методике, считают, что высказывания $5 \leqslant 7$; $2 \geqslant 2$ ложны вследствие непонимания смысла дизъюнктивной связи.

Учащиеся, знающие точное определение дизъюнкции, отвечают утвердительно на вопрос «истинно ли высказывание $5 \leqslant 7$?» и объясняют свой ответ примерно так: «$5 \leqslant 7$ сокращенная запись дизъюнкции «$5 < 7$ **или** $5 = 7$», и так как одно из составляющих высказываний ($5 < 7$) истинно, то и вся дизъюнкция истинна».

Пример 2. Непонимание смысла дизъюнктивной связи часто приводит и к серьезным математическим ошибкам. Например, в установившейся практике обучения говорят, что неравенство типа $\frac{x-2}{x-6} > 0$ «распадается» на две системы неравенств или что его решение «сводится» к решению двух систем неравенств. Но что означает «распадается», «сводится», как связаны между собой две системы неравенств, обычно не разъясняется. В результате пренебрежения логической связью между системами неравенств или в связи с применением союза «или» в смысле «и» учащиеся часто приходят к неправильному выводу, что данное неравенство не имеет решений (принимая пересечение множеств решений двух систем вместо их объединения за множество решений исходного неравенства).

Применение в явном виде логических операций позволяет полностью записать на точном языке рассуждение, которое выполняется при решении данного неравенства, и представить последнее в виде логической функции, выраженной через более простые (линейные) неравенства: «дробь $\frac{x-2}{x-6}$ положительна при всех тех и только тех значениях

переменной x, при которых числитель **и** знаменатель положительны **или** числитель **и** знаменатель отрицательны»:

$$\frac{x-2}{x-6}>0 \Leftrightarrow x-2>0 \text{ и } x-6>0 \text{ или } x-2<0 \text{ и } x-6<0.$$

Упрощая полученную формулу

$$x>2 \text{ и } x>6 \text{ или } x<2 \text{ и } x<6 \Leftrightarrow x>6 \text{ или } x<2,$$

учащиеся (изучавшие элементы логики) безошибочно определяют множество решений исходного неравенства как область инстинности полученной дизъюнкции:

$$\left\{x\left|\frac{x-2}{x-6}>0\right.\right\}=\{x|x>6 \text{ или } x<2\}=\{x|x>6\}\cup\{x|x<2\}=$$
$$=]-\infty,\ 2[\cup]6,\ +\infty[.$$

Многие ученики не различают прямую и обратную импликации, когда они обе истинны или обе ложны. Это является источником ошибочных рассуждений. На вопрос учителя: «Что вы можете сказать о параллелограмме, у которого диагонали взаимно перпендикулярны?» — последовал такой ответ ученика: «Это — ромб, так как в ромбе диагонали взаимно перпендикулярны».

Достижение понимания ошибочности этого рассуждения возможно с помощью некоторой формализации, касающейся логического компонента изучаемого материала. Восстановим полностью рассуждение ученика: «Если параллелограмм — ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны; в данном параллелограмме диагонали взаимно перпендикулярны; следовательно, данный параллелограмм — ромб».

Целесообразно привести учащимся пример рассуждения той же структуры, но другого содержания, ошибочность которого была бы очевидной. Например, «если стол дубовый, то он деревянный; данный стол деревянный, следовательно, он дубовый».

Чтобы показать, что эти два рассуждения различного содержания имеют одну и ту же структуру, форму, достаточно заменить встречающиеся в них элементарные высказывания переменными. Заменим, например, высказывания «параллелограмм — ромб» и «стол — дубовый» переменной X, а высказывания «его диагонали взаимно перпендикулярны» и «он — деревянный» переменной Y. Тогда легко записать схему приведенных рассуждений или использованное в них правило вывода:

$$\frac{X \Rightarrow Y,\ Y}{X}.$$

Достаточно знать определение импликации, чтобы убедиться в том, что такое правило вывода «недопустимо», так как может привести от истинных посылок к ложному заключению (при $X = Л$ и $Y = И$ обе посылки истинны, а заключение ложно), и поэтому любое рассуждение, построенное по такой схеме, ошибочно, даже если заключение в нем само по себе истинно (оно может быть истинным, но не следовать из данных посылок).

Пример 3. Наши эксперименты показали, что подавляющее большинство учащихся (и студентов, не имеющих специальной логической подготовки) не умеет правильно строить отрицания высказываний сложной логической структуры и этим объясняются некоторые часто встречающиеся ошибки в их рассуждениях, в частности в косвенных доказательствах.

Учащимся старших классов, студентам физико-математических факультетов и учителям (не имеющим никакой специальной логической подготовки) были предложены две задачи.

Задача 1. Найти ошибку в следующем доказательстве закона коммутативности сложения:

$$a + b = b + a \text{ для всех } a \text{ и } b. \qquad (1)$$

Допустим, что этот закон неверный. Тогда $a + b \neq b + a$ для всех a и b. Подставив $b = a$, получаем противоречие $a + a \neq a + a$. Следовательно, наше допущение неверно и закон коммутативности доказан.

Задача 2. Найти ошибку в доказательстве предложения: «Если прямая a перпендикулярна к какой-либо одной прямой b плоскости α, то она перпендикулярна и к самой плоскости α».

Допустим, что прямая a не перпендикулярна к плоскости α. Тогда из определения перпендикулярности прямой и плоскости следует, что прямая a не перпендикулярна ни к одной прямой плоскости α, в том числе прямой b, что противоречит условию. Предложение доказано.

Подавляющее большинство тех, кому было предложено решить эти задачи (учащиеся, студенты, учителя без специальной логической подготовки), не справились с ними. При решении задачи 1 некоторые усматривали ошибку в подстановке вместо b числа a, объявляя, разумеется, без

всякого основания такую подстановку незаконной. Другие же утверждали, что приведенное доказательство безошибочно.

Мы предложили решить эту задачу и учащимся, изучавшим элементы логики на факультативных занятиях. Подавляющее большинство учащихся справились с этой задачей.

Приведем решение одной ученицы: «Из ложности высказывания

$$\forall a \forall b\,(a + b = b + a) \tag{1}$$

не следует истинность высказывания (допущения)

$$\forall a \forall b\,(a + b \neq b + a), \tag{2}$$

которое не является отрицанием высказывания (1).

Отрицание высказывания (1):

$$\exists a \exists b\,(a + b \neq b + a). \tag{3}$$

Но высказывание (3) мы не можем опровергнуть таким способом, каким опровергнуто (2), и поэтому таким путем нельзя доказать (1)».

Так как задача 2 отличается от задачи 1 тем, что доказываемое в ней предложение ложно, многие из испытуемых и стремились это доказать, т. е. подменили задачу отыскания ошибки в приведенном доказательстве задачей опровержения доказываемого предложения. С этой задачей они справились, так как в традиционном преподавании обращают больше внимания на развитие пространственных представлений, чем на развитие логики мышления.

Учащиеся, знакомые с логическим аппаратом, решили задачу 2 примерно так: «Неверно, что из определения перпендикулярности прямой и плоскости следует, что прямая a не перпендикулярна ни к одной прямой плоскости α.

Действительно, из определения

$$a \perp \alpha \underset{Df}{\Leftrightarrow} \forall b\,(b \subset \alpha \Rightarrow a \perp b)$$

следует лишь, что

$$\overline{a \perp \alpha} \Leftrightarrow \exists b\,(b \subset \alpha \text{ и } \overline{a \perp b}),$$

т. е. если прямая a неперпендикулярна плоскости α, то существует на этой плоскости прямая b (хотя бы одна), которой прямая a неперпендикулярна, но из этого вовсе не следует, что прямая a неперпендикулярна ни к одной прямой плоскости α».

Приведенные примеры — лишь несколько из очень многих, иллюстрирующих недостаток традиционной методики в области логического развития учащихся и эффективность специальных логических знаний, их использования в обучении математике.

2. Роль и место элементов логики в обучении математике

2.1. Проблема введения элементов логики в обучение математике состоит не в том, чтобы изучить специально и обособленно логику, а в том, чтобы необходимые элементы логики стали неотъемлемой частью самого преподавания математики, важным вспомогательным инструментом, повышающим его эффективность и влияние на логическое развитие учащихся.

Эта проблема не нова, но хотя она давно уже является предметом обсуждения, до сих пор не получила удовлетворительного решения, пригодного для широкой практики преподавания. Это, очевидно, объясняется тем, что в своей традиционной форме логика существенно отличалась от математики и ее изучение требовало применения новых методов, представляло собой по существу отвлечение от математики, параллельное изучение разнородных областей знаний.

В настоящее время, когда логика изучается математическими методами, включение ее элементов в обучение математике представляет собой естественное расширение математических методов, идей и языка на новые объекты — логические, и это расширение способствует лучшему усвоению самих этих методов, идей и языка.

Некоторые современные проекты школьного преподавания математики (разрабатываемые за рубежом) сводят введение элементов логики в обучении математике к логической символике, понимаемой как своеобразная стенография, позволяющая кратко записывать математическую информацию. Такая постановка проблемы и предлагаемые решения вряд ли могут содействовать прогрессу в обучении математике.

2.2. Проблема введения и использования элементов логики в обучении математике включает три основных вопроса:

1) ЧТО (какие элементы логики необходимо изучать в школьном курсе математики)?

2) ГДЕ (в каком месте курса математики, в связи с ка-

ким математическим материалом необходимо изучать эти элементы логики)?

3) КАК (в каком аспекте, на каком уровне можно их изучать в школе)?

Эти вопросы обсуждались в советской и зарубежной математической литературе. Ограничимся кратким изложением нашей точки зрения, не являющейся единственно возможной (*Столяр А. А.* Логические проблемы преподавания математики.— Мн., 1965):

а) минимальная логическая программа, обеспечивающая потребности глубокого усвоения школьной математики и логического развития учащихся, включает разъяснение смысла логических операций (отрицания, конъюнкции, дизъюнкции и импликации), отношений следования и эквивалентности между высказываниями, связывания кванторами, простейших правил вывода и анализ рассуждений;

б) элементы логики не должны изучаться, как мы уже говорили (см. 2.1), обособленно, как отдельный раздел школьного курса, на каком-то определенном этапе обучения. Они должны стать неотъемлемой частью самого обучения математике, и поэтому их следует рассредоточить по всему курсу математики.

Описанная минимальная «логическая программа» должна быть реализована в начальных и средних классах школы. В старших классах может быть осуществлена систематизация логических знаний среди хотя бы части учащихся в рамках специального факультативного курса или же продолжена работа по расширению логических знаний в связи с изучаемым математическим материалом.

В связи с уточнением роли логики в теории и практике обучения математике уместно привести высказывание академика А. Н. Колмогорова из его статьи «Современные взгляды на природу математики»: «Ответственность преподавателей математики здесь особенно велика, так как отдельного предмета «логика» в школе нет и знакомство с началами логики практически в значительной мере происходит на уроках математики» (Математика в школе, 1969, № 3, с. 17). Речь идет, конечно, лишь о разумном, дидактически целесообразном разъяснении и применении некоторых логических понятий и обозначений как важных вспомогательных средств обучения. Переоценка роли логики как одной из основ теории обучения математике так же вредна, как и недооценка этой роли.

Роль элементов логики в обучении математике повышается в связи с поставленной реформой школы задачей во-

оружать учащихся знаниями и навыками использования современной вычислительной техники, так как диалог «Человек — ЭВМ» предъявляет к человеку высокие требования логического порядка.

3. Методика разъяснения смысла и свойств логических операций

3.1. Рассмотрим методику разъяснения смысла и некоторых свойств логических операций на различных этапах обучения. Речь идет, разумеется, не об изучении логики или каких-либо элементов логики, а о разъяснении простейших логических понятий, без понимания которых немыслимо и понимание самой математики. Такое разъяснение может быть осуществлено на самых ранних этапах обучения и без применения специальной логической терминологии или символики. Важно не усвоение учащимися терминов, например, «конъюнкция», «дизъюнкция» или применение знаков $\wedge$, $\vee$, а достижение правильного понимания ими смысла логических связок «и», «или», которое, как было показано, не обнаруживается без специального разъяснения.

Для разъяснения точного смысла логических связок целесообразны определенного рода упражнения. Приведем несколько примеров.

Пример 1. Предлагается указать на координатной прямой точки, координата x которых:

а) удовлетворяет одному из следующих условий:

$$x<0; \quad (1)$$
$$x>-5; \quad (2)$$
$$x<0 \text{ и } x>-5; \quad (3)$$
$$x<0 \text{ или } x>-5; \quad (4)$$

б) не удовлетворяет условию или (1), или (2), или (3), или (4).

Сначала можно потребовать указать лишь некоторые точки (скажем, с целочисленными координатами), удовлетворяющие (неудовлетворяющие) этим условиям. В дальнейшем после изучения вещественных чисел в подобных упражнениях целесообразно указывать на прямой все такие точки.

Каждое из условий (1)—(4) выражено с помощью предложения; условия (1) и (2) — с помощью элементарных предложений, представляющих собой неравенства (разу-

меется, из того, что всякое неравенство или уравнение выражается с помощью предложения, не следует, что всякое предложение, в том числе, например, «Днепр впадает в Черное море», выражает уравнение или неравенство); условия (3) и (4) — с помощью сложных (составных) предложений, сконструированных с помощью союзов **и** и **или**.

Обычно условие (3) называют *системой неравенств* и обозначают

$$\begin{cases} x < 0; \\ x > -5, \end{cases}$$

т. е. фигурная скобка заменяет союз **и** между неравенствами. Когда же решают такую систему, то ищут как раз те значения x, которые удовлетворяют (обращают в верное числовое неравенство) каждое из неравенств системы, что и соответствует смыслу союза **и**.

Можно привести и пример геометрического содержания: предложение «Точка M принадлежит прямой a **и** прямой b» ($M \in a$ **и** $M \in b$) истинно, если истинно каждое из двух составляющих предложений «$M \in a$» и «$M \in b$», т. е. если M — общая точка двух прямых.

Обобщая рассмотренные примеры, приходят к выводу: сложное предложение, образованное с помощью союза **и**, выражает истинное высказывание тогда и только тогда (при всех тех и только тех значениях x, если оно содержит эту переменную), когда (при которых) оба составляющие предложения выражают истинные высказывания.

Если же, как в условии (4), неравенства связаны союзом **или**, то иногда их называют (хотя и не совсем удачно) *совокупностью неравенств* и обозначают

$$\left[\begin{array}{l} x < 0; \\ x > -5, \end{array}\right.$$

т. е. квадратная скобка заменяет союз **или** между неравенствами.

Когда же решают такую совокупность неравенств, то ищут все те значения x, которые удовлетворяют хотя бы одному из неравенств совокупности, что и соответствует смыслу союза **или** (точнее, одному из двух смыслов, в которых этот союз применяется в обыденной речи, а именно неразделительному союзу «или»).

Предложение «$M \in a$ **или** $M \in b$» истинно, если истинно хотя бы одно из составляющих предложений, т. е. если точка M принадлежит прямой a, или принадлежит прямой b, или принадлежит обеим прямым a и b.

Таким образом, постепенно приходят к выводу, что предложение, составленное с помощью союза **или**, выражает истинное высказывание, если (при всех тех значениях x, при которых) хотя бы одно из составляющих предложений выражает истинное высказывание.

Целесообразно всегда одновременно разъяснять и сопоставлять смысл союзов **и** и **или**, что будет способствовать их правильному пониманию.

Пример 2. В процессе дальнейшего обучения получаем возможность неоднократно обращать внимание на смысл союзов **и** и **или**, в частности, решая, например, неравенства вида

$$|x-1|<3; \qquad (1)$$

$$|x-1|>3. \qquad (2)$$

Освобождаясь от знака модуля в (1), записываем двойное неравенство $-3<x-1<3$, представляющее сокращенную запись системы (конъюнкции) неравенств

$$\begin{matrix} x-1<3; \\ x-1>-3; \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x<4; \\ x>-2; \end{cases} \Leftrightarrow x<4 \text{ и } x>-2, \Leftrightarrow -2<x<4.$$

Освобождаясь от знака модуля в (2), получаем совокупность (дизъюнкцию) неравенств

$$\begin{bmatrix} x-1>3; \\ x-1<-3; \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x>4; \\ x<-2; \end{bmatrix} \Leftrightarrow x>4 \text{ или } x<-2$$

(в подобных ситуациях учащиеся очень часто допускают ошибки, заключая, что неравенство (2) не имеет решений, т. е. понимают **или** в смысле **и**).

Усвоение точного смысла логических связок «не», «и», «или» подготавливает учащихся к пониманию функционирования соответствующих блоков процессоров (см. гл. 29).

3.2. Разъяснение смысла импликации, т. е. логической связки «если..., то», вполне возможно в VII классе. Здесь прежде всего необходим анализ высказывания о следовании. У школьников имеется богатый опыт использования высказываний этого типа, но, как показывает этот опыт, логическая связь, выражаемая словами «если..., то...», остается непонятной для многих учащихся.

Речь идет не о формулировке определения этой связи. Различные ошибки, допускаемые учащимися при употреблении оборота «если..., то...», говорят о том, что им неясна эта связь.

С помощью конкретных примеров необходимо показать,

что в обычном применении высказывание типа «если X, то Y» в смысле «из X следует Y» считается истинным при условии выполнения двух требований: 1) при истинности посылки (X) следствие (Y) не может быть ложным, т. е. оно также истинно; 2) X и Y связаны по смыслу, по содержанию.

Приведем два примера.

Пример 1. Нам известно из арифметики, что высказывание «если каждое слагаемое делится на 3, то и сумма делится на 3» истинно, т. е. что из высказывания «каждое слагаемое делится на 3» (X) следует высказывание «сумма делится на 3» (Y).

Какие же наборы значений истинности составляющих высказываний X и Y возможны, когда высказывание «если X, то Y» истинно?

Можно указать случай, когда X и Y оба истинны. Например, если в качестве слагаемых взять числа 6 и 9, то истинно и высказывание «каждое слагаемое делится на 3», т. е. X, и высказывание «сумма делится на 3», т. е. Y. Если же взять в качестве слагаемых 4 и 5, то X ложно, а Y истинно. Если же взять в качестве слагаемых 4 и 7, то и X, и Y ложны.

Совершенно очевидно, что только один случай невозможен: мы не найдем таких двух слагаемых, чтобы каждое из них делилось на 3, а их сумма не делилась на 3, т. е. чтобы X было истинным, а Y ложным.

Пример 2. Известно, что высказывание «если данный четырехугольник — квадрат, то около него можно описать окружность» истинно, т. е. из высказывания «данный четырехугольник — квадрат» (X) следует высказывание «около этого четырехугольника можно описать окружность» (Y).

Здесь, как и в примере 1, возможны три случая (три набора значений истинности составляющих высказываний X и Y): 1) $X=$И и $Y=$И, т. е. данный четырехугольник является квадратом, и около него можно описать окружность; 2) $X=$Л и $Y=$И, т. е. данный четырехугольник не является квадратом, но около него можно описать окружность (ведь квадрат не единственный вид четырехугольника, около которого можно описать окружность); 3) $X=$Л и $Y=$Л, т. е. данный четырехугольник не является квадратом, и около него нельзя описать окружность.

Невозможен лишь один случай: $X=$И и $Y=$Л, т. е. когда четырехугольник — квадрат, а около него нельзя описать окружность.

В примерах 1, 2 мы обнаружили, что если из высказывания X следует высказывание Y, т. е. истинно высказыва-

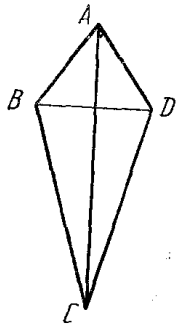


Рис. 51

ние о следовании «если X, то Y», то невозможно, чтобы X был истинным, а Y ложным. Таким образом, высказывание «если X, то Y» с логической точки зрения имеет тот же смысл, что и высказывание «Неверно, что X истинно и Y ложно».

Обычно, когда мы хотим установить ложность высказывания «если X, то Y», т. е. что Y не следует из X, мы доказываем существование случая, когда $X=$И, а $Y=$Л. Например, высказывание «если в четырехугольнике диагонали взаимно перпендикулярны, то этот четырехугольник — ромб», как известно, ложно. Как же мы устанавливаем ложность этого высказывания? Обычно мы строим такой четырехугольник: диагонали у него взаимно перпендикулярны, но он все же не является ромбом (рис. 51). Таким образом мы показываем возможность случая, когда X истинно, а Y ложно.

Итак, в обычном понимании высказывание «если X, то Y» считается ложным в том и только в том случае, когда X истинно, а Y ложно. Это и принимается в качестве определения импликации:

X	Y	$X \Rightarrow Y$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

3.3. Кванторы общности и существования, разумеется, в словесном выражении (иногда кванторами ошибочно называют их символические обозначения $\forall$ и $\exists$) часто встречаются уже на ранних этапах обучения. Например, в IV классе закон коммутативности сложения формулируется так:

$$a+b=b+a \text{ для любых } a \text{ и } b,$$

и это не вызывает никаких затруднений.

Однако в дальнейшем формулировки математических предложений усложняются, в них встречаются кванторные приставки с разноименными кванторами. Например, разрешимость уравнения $a+x=b$ в множестве целых или рациональных чисел выражается утверждением «для любых a и b существует x, такое, что $a+x=b$». В то же время в множестве N натуральных чисел это предложение неверно, т. е.

верно его отрицание, а именно: «не для любых a и b существует x, такое, что $a+x=b$», или «существуют a и b, такие, что ни для какого x не имеет место $a+x=b$».

Как видно, возникает необходимость не только в понимании точного смысла кванторов, но и в умении оперировать ими, строить отрицания предложений с кванторами, переформулировать некоторые предложения с целью лучшего выяснения их содержания (не надо забывать о связи формы с содержанием).

Для достижения такого понимания и приобретения необходимых умений целесообразно выполнение некоторых специальных упражнений, в частности с помощью так называемых логических карт.

Логическая карта состоит из двух частей (таблиц): А — перечень кванторных приставок, в том числе с отрицаниями; Б — перечень математических предложений с переменными, на которые можно «навешать» любую из заданных в А кванторных приставок.

Каждая логическая карта, составленная на определенном математическом материале, способствует не только его более глубокому усвоению, но и выяснению точного смысла кванторов и связи между ними.

Приведем два примера.

Пример 1. Дана простейшая логическая карта, предназначенная для изучения свойств нуля:

I. Для всякого x ... II. Существует x, такое, что ... III. Не для всякого x ... IV. Не существует x, такое, что ...	(А)

1. $x+0=x$;	5. $0+x=x$;	(Б)
2. $x\cdot 0=x$;	6. $0\cdot x=0$;	
3. $x+0=0$;	7. $0:x=0$;	
4. $x\cdot 0=0$;	8. $x:0=x$.	

Перечни (А) и (Б) вывешиваются на доске, а каждому ученику предлагается заполнить таблицу (так, как заполнена первая строка):

	1	2	3	4	5	6	7	8
I	И	Л	Л	И	И	И	Л	Л
II								
III								
IV								

Заполненные учащимися таблицы дают богатый материал для обсуждения вопросов, связанных со смыслом кванторов и свойствами нуля.

Пример 2. Дана логическая карта для кванторных приставок с двумя переменными:

I. Для всякого x, всякого y (для всяких x, y) ...	(А)
II. Существует x, существует y (существуют x, y), такие, что ...	
III. Для всякого y, всякого x (для всяких y, x) ...	
IV. Существует y, существует x (существуют y, x), такие, что ...	
V. Для всякого x существует y, такое, что ...	
VI. Существует x, такое, что для всякого y ...	
VII. Не для всякого x существует y, такое, что ...	
VIII. Существует x, такое, что не для всякого y ...	

1. $x+y=y+x$;	5. $x \cdot y = x$;	(Б)
2. $x \cdot y = y \cdot x$;	6. $x<y$;	
3. $x+y=0$;	7. $y=x+1$;	
4. $x \cdot y = 0$;	8. $x=y+1$.	

Учащимся предлагается заполнить таблицу, аналогичную приведенной.

Истинность (ложность) высказываний, полученных из приведенных высказывательных форм навешиванием различных кванторных приставок, зависит, разумеется, и от области значений переменных. Так, например, высказывание V, 3 ложно на множестве N, истинно на множестве Z или Q. Поэтому для каждой логической карты указывается область значений переменных. Интересно также рассматривать одну и ту же карту с различными областями значений переменных.

4. Методика анализа рассуждений [1]

4.1. Разработанная методика анализа рассуждений средствами логики высказываний или классов (множеств) в процессе обучения математике включает: а) рассмотрение рассуждений одинаковой структуры, но различного содер-

[1] Этот материал предназначен для факультативных занятий или классов с углубленным изучением математики.

жания; б) обобщение и абстрагирование формы рассуждения от его содержания (отвлечение структуры рассуждения от его содержания достигается заменой фигурирующих в нем элементарных высказываний пропозициональными переменными в тех случаях, когда рассуждение поддается анализу средствами логики высказываний или заменой конкретных множеств переменными для множеств в тех случаях, когда для анализа рассуждения мы пользуемся средствами алгебры множеств); в) запись схемы рассуждения (правила вывода) на языке логики высказываний или множеств; г) установление допустимости (или недопустимости) полученного правила вывода (правило вывода считается допустимым, если его применение к истинным посылкам не может привести к ложному заключению).

Если посылки и заключение записаны на языке логики высказываний, то допустимость правила вывода сводится к тождественной истинности импликации, основанием которой является конъюнкция посылок, а следствием — заключение. Доказательство (или опровержение) тождественной истинности этой импликации легко осуществляется (для рассматриваемых случаев) или табличным способом, или способом «от противного» (допущение об истинности посылок и ложности заключения приводит к противоречию), или же преобразованием формулы.

Если посылки и заключение выражены на языке алгебры множеств, допустимость правила вывода легко устанавливается с помощью диаграмм Эйлера. Строятся всевозможные диаграммы, в которых посылки истинны, и если хотя бы в одной из них заключение ложно, то правило вывода недопустимо.

Приведем два примера в качестве иллюстрации этой методики анализа рассуждений.

Пример 1. Выясним, правильны ли рассуждения:

«Если треугольник равнобедренный, то две его стороны равны; если две стороны треугольника равны, то два его угла равны; следовательно, если треугольник равнобедренный, то два его угла равны»; (I)

«Если число натуральное, то оно рациональное; если число рациональное, то оно вещественное; следовательно, если число натуральное, то оно вещественное». (II)

Отвлечемся от содержания рассуждений (I) и (II). Для этого заменим высказывания «треугольник — равнобедренный» и «число — натуральное» переменной X; высказывания «две стороны треугольника равны» и «число — рациональное» — переменной Y, а высказывания «два угла треугольника рав-

ны» и «число — вещественное» — переменной Z. Тогда первая посылка в каждом из рассуждений (I) и (II) запишется в виде импликации $X \Rightarrow Y$, вторая — в виде $Y \Rightarrow Z$, а заключение $X \Rightarrow Z$.

Таким образом, каждое из этих рассуждений построено по следующей схеме (правилу вывода):

$$\frac{X \Rightarrow Y,\ Y \Rightarrow Z}{X \Rightarrow Z}.$$

Допустимость этого правила вывода легко доказывается способом «от противного». Предположим, что это правило недопустимо, т. е. что при каком-то наборе значений переменных посылки истинны, а заключение ложно: $X \Rightarrow Y = \text{И}$ (1); $Y \Rightarrow Z = \text{И}$ (2), а $X \Rightarrow Z = \text{Л}$ (3). Из (3) следует, что $X = \text{И}$ (4) и $Z = \text{Л}$ (5). Из (2) и (5) следует, что $Y = \text{Л}$ (6), а из (1) и (6) следует, что $X = \text{Л}$ (7). Мы получили противоречие (4) и (7), доказывающее допустимость правила вывода

$$\frac{X \Rightarrow Y,\ Y \Rightarrow Z}{X \Rightarrow Z},$$

называемого правилом *силлогизма* (ПС).

Так как в рассуждениях (I) и (II) применено допустимое правило вывода (ПС), то эти рассуждения правильны.

Пример 2. Рассмотрим следующие два рассуждения:

«Все ромбы — параллелограммы; некоторые четырехугольники не являются ромбами; следовательно, некоторые четырехугольники не являются параллелограммами». (III)

«Все натуральные числа — рациональные; некоторые вещественные числа не являются натуральными; следовательно, некоторые вещественные числа не являются рациональными». (IV)

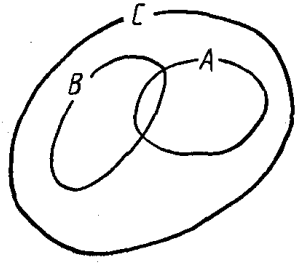


Рис. 52

Хотя заключения в обоих рассуждениях истинны, они не следуют из посылок, и поэтому оба рассуждения неправильны. Это легко установить.

Чтобы отвлечься от содержания этих рассуждений и выделить их структуру, форму, заменим множества четырехугольников (в III) и вещественных чисел (в IV) произвольным множеством A, множества ромбов (в III) и натуральных чисел (в IV) — произ-

вольным множеством B, а множества параллелограммов (в III) и рациональных чисел (в IV) — произвольным множеством C. Тогда получим следующую схему рассуждений (III) и (IV), т. е. правило вывода:

$$\frac{B \subseteq C,\ A \cap \overline{B} \neq \varnothing}{A \cap \overline{C} \neq \varnothing}.$$

Легко построить диаграмму Эйлера, изображающую случай, когда обе посылки истинны, а заключение ложно (рис. 52).

Следовательно, это правило вывода недопустимо и рассуждения (III) и (IV), как и любое другое рассуждение, построенное по этому правилу, неправильны.

4.2. Усвоение простейших правил вывода (правил заключения, контрапозиции, расширенной контрапозиции, силлогизма и др.) не означает, что после этого усвоивший их будет каждый раз, когда требуется вывести заключение из данных посылок, думать о соответствующем правиле вывода, так же как хорошо усвоивший грамматические правила не думает, какое правило он применяет в письменном или устном изложении мыслей.

Интуиции и здравого смысла оказывается часто недостаточно для развитого умения правильно рассуждать, так же как и для умения правильно выражать свои мысли средствами языка. Но сама интуиция может вырабатываться в правильной форме на основе многократных действий по определенным правилам.

Педагогический эксперимент подтверждает, что изучение простейших правил вывода и некоторая тренировка в их применении в явном виде приводят к дальнейшему развитию интуиции в области построения правильных рассуждений, так как осознанные действия по правилам переходят в правильные интуитивные действия, непосредственно не опирающиеся на правила.

Значение специальных логических знаний выходит далеко за рамки успешного усвоения школьного курса математики. Широкое использование в науке и технике «умных» машин (ЭВМ) требует от людей умения глубоко анализировать рассуждения и формализировать их, ибо машина не может опираться на «логическую интуицию». Общение с такими машинами становится необходимым для все большего числа профессий, а такое общение будет доступным лишь тем, кто владеет, кроме логической интуиции, умени-

ем представить рассуждения в формализованном виде (абстрагировать структуры рассуждений от их содержания), иначе машина не поймет человека, и система человек — машина окажется расстроенной.

Отсюда и получаются современные требования к логической подготовке учащихся: навыки дедукции, логического анализа, обобщения, абстрагирования, осознания логических структур и их взаимосвязей, навыки классификации и формализации.

13. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЯЗЫК И ОБУЧЕНИЕ МАТЕМАТИКЕ

1. Язык математики

1.1. Разработка искусственного языка символов и формул была величайшим достижением науки, в значительной мере определившим дальнейшее развитие математики. В настоящее время становится все более очевидным, что математика — это не только совокупность фактов и методов, но (быть может даже прежде всего) и язык для описания фактов и методов самых разных областей науки и практической деятельности.

1.2. Математический язык является результатом усовершенствования естественного языка по различным направлениям: устранению громоздкости естественного языка и его двусмысленности, расширению его выразительных возможностей.

Математический язык в отличие от естественного называют *символическим*, хотя и естественный язык тоже пользуется определенными символами — буквами и знаками препинания. Это название вполне оправдано, так как между использованием символов в математическом и естественном языках имеется существенное различие.

В математическом языке один знак — цифра, буква, знак операции или отношения — обозначает то, что в естественном языке обозначается словом, т. е. определенной конечной последовательностью знаков — букв из алфавита этого языка. Этим достигается значительное сокращение «длины» языковых выражений. Например, предложение «2+3=5» запишется на русском языке так: «Два плюс три равно пяти». Различие в длине строки, занятой записью этого предложения на математическом и на естественном языках, существенно.

Совершенно очевидно, что такое использование символов в математическом языке, являющееся одной из характерных особенностей последнего, освобождает его от громоздкости естественного языка и вполне оправдывает название «символический».

Язык хорошо приспособлен к точному описанию некоторой предметной области, если в нем: 1) для каждого предмета, свойства предмета и отношения между предметами из этой области имеется соответствующее языковое выражение — имя; 2) различные предметы, свойства, отношения имеют различные имена. Если первое из этих условий не выполняется, то язык беден, недостаточен для описания данной предметной области, если же второе условие не выполняется, то язык неясный, двусмысленный.

Такой двусмысленностью в силу различных исторически обусловленных причин обладают естественные языки. Наличие в них омонимов является нарушением первого условия. Хотя смысл омонимов часто угадывается из контекста, их применение и в естественном языке может привести к недоразумениям (например, выражение «Идет девочка с косой» можно понимать так: идет девочка, у которой волосы заплетены в косу, или у которой в руках коса — сельскохозяйственное орудие).

Математика нуждается в точном и ясном языке, в котором каждый символ, каждое образование из символов имеет только один смысл. Этому условию, как видно, не удовлетворяет естественный язык. Точность и ясность (недвусмысленность) математического языка, адекватность его форм логической структуре выражаемых этими формами отношений обеспечиваются также использованием кванторов и скобок.

Одно из существенных различий между математическим и естественным языками состоит в применении *переменных*. Благодаря использованию различных типов переменных математический язык хорошо приспособлен для выражения общих закономерностей. На этом языке можно выразить формы, которые заполняются различным содержанием. Разумеется, эти формы не лишены содержания, они отвлечены от частного, конкретного содержания и включают лишь то общее, что относится не к отдельному предмету или отношению, а к целому множеству предметов или отношений.

1.3. Математический язык, как и естественные языки, имеет два аспекта: семантический и синтаксический.

Семантика математического языка изучает отношение между языковыми образованиями и обозначаемыми ими

объектами. Она рассматривает язык с точки зрения *смысла*, содержательного значения его выражений.

Синтаксис математического языка рассматривает структуру, внутреннее строение этого языка безотносительно к смысловому значению его выражений, к тому, что они обозначают во внеязыковой действительности.

2. Математический язык и обучение математике

2.1. Если мы согласны с тем, что математика в определенном аспекте представляет собой специальный язык для описания конкретных ситуаций, возникающих в других науках и в практической деятельности (см. (1.1)), что решение задач, возникающих вне математики, предполагает прежде всего перевод этих задач на язык математики и обратный перевод результата с языка математики на язык той предметной области, которой принадлежат эти задачи, и если, наконец, учесть, что знать математику означает уметь ее применять к решению разнообразных задач, возникающих в жизни, в различных областях науки, техники и практической деятельности, то совершенно ясно, что обучение математике означает и обучение математическому языку.

2.2. Неправильное сочетание семантического и синтаксического подходов к изучению математического языка в преподавании часто является источником формальных знаний учащихся. Отрыв формы от содержания по существу означает отрыв символов и формул математического языка от того, что они обозначают во внеязыковой действительности, а это может быть результатом недостаточного внимания в обучении семантике математического языка. Этим объясняются, в частности, трудности, возникающие у школьников при переводе задач на математический язык.

Учащиеся слабо владеют и синтаксисом математического языка. Об этом свидетельствуют ошибки, допускаемые ими при чтении алгебраических выражений (из-за незнания структуры этих выражений) или же при преобразовании выражений. Например, $(x+y)(a+b)=x\cdot a+y\cdot b$ или из $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{1}{R}$ находят $R=R_1+R_2$ (из-за незнания соответствующих алгоритмов, носящих синтаксический характер).

Учащихся не учат различать основные типы образова-

ний математического языка, соответствующие словам и предложениям естественного языка. Обычно не подчеркивается различие между языковым выражением, с помощью которого обозначается объект (именем объекта), и самим обозначаемым объектом (денотатом имени).

Например, не подчеркивается различие между числом пять как инвариантом класса множеств, эквивалентных множеству, допустим, пальцев человеческой руки (т. е. общим свойством всех таких множеств), и словом «пять», знаками 5, 101, V, словом «five», которыми это число обозначается на русском языке, в различных системах счисления, на английском языке. Аналогично в традиционном преподавании не разъясняется различие между языковым выражением x^2-3x+2 и функцией, определяемой этим выражением.

2.3. В школьном обучении важны оба подхода к изучению математического языка — семантический и синтаксический.

Если ограничиться одной семантикой, то учащиеся не научатся пользоваться формальным математическим аппаратом, а следовательно, и решать задачи с помощью этого аппарата. Если ограничиться синтаксисом, то ученики не будут понимать смысл выражений математического языка, не смогут переводить задачи, возникающие вне математики, в математические, их знания окажутся формальными, а значит, бесполезными.

Правильное сочетание двух подходов к изучению математического языка в зависимости от специфики рассматриваемых вопросов и этапа обучения — важная педагогическая проблема.

Что же касается проблемы правильного сочетания двух подходов к изучению математического языка в школьном обучении, то мы ограничимся лишь одним замечанием общего характера: семантический подход, очевидно, должен превалировать на всех этапах обучения, синтаксический следует применять лишь там, где необходимо усвоение определенных алгоритмов.

3. Переменная

3.1. Процесс формирования понятия переменной может начинаться уже в первом классе, но он, конечно, не завершается в этом классе. Этот процесс длительный.

В учебных книгах по арифметике для начальных классов упражнения на заполнение пустых мест формулируются

примерно так: «Какое число нужно поставить вместо точек в «7+...=10» или «Поставьте вместо точек число». Но в такой постановке вопрос не имеет определенного (однозначного) решения. Мы можем поставить вместо точек любое число. Разумеется, не при всякой подстановке получится верное равенство (истинное высказывание). Подобная постановка вопроса не способствует формированию понятия о переменной, тем более, что после некоторых таких упражнений появляется буква x как символ определенного, пока неизвестного числа. Отсюда и берет начало представление о том, что в уравнении $7+x=10$ эта буква может принимать только значение 3 вместо того, чтобы рассматривать x как переменную, которая может принимать любые значения (из некоторого множества). Конечно, только при подстановке вместо x его значения 3 это уравнение обращается в истинное высказывание.

Последняя точка зрения педагогически более эффективна, она освобождает учение об уравнениях и неравенствах от традиционных трудностей.

Упражнения указанного типа в начальных классах следовало бы формулировать примерно так: «При подстановке какого числа из множества чисел $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ вместо точек в $7+...=10$ (или вместо x в $7+x=10$) получится верное равенство»; «Подставьте вместо точек в $7+...=10$ число из множества A так, чтобы получилось верное равенство». Затем, варьируя множество A, задавая, например, $A=\{5, 6, 7, 8\}$, мы подводим учеников к пониманию того, что одно и то же равенство с пустым местом $7+...=10$ или одно и то же равенство с переменной $7+x=10$ может обращаться в верное равенство при каком-то значении x из A или обращаться в неверное равенство при всех значениях x из A — все зависит от области значений A переменной x. Это готовит учащихся к пониманию в дальнейшем зависимости решения уравнения от того, в каком множестве рассматривается это уравнение.

Без понятия переменной нет математического языка. Поэтому безнадежны попытки исключения этого понятия из языка школьной математики.

3.2. Учащимся в возрасте 11—12 лет можно предложить следующую задачу: «По имеющемуся образцу справки, выданной одному ученику, необходимо составить форму такой же справки для всех учащихся класса».

Эта задача представляет собой упражнение на абстрагирование формы от конкретного содержания (относящегося к данному ученику).

Получается, например, следующая форма:

Справка

Дана_____ в том, что он_____

действительно является учени_____ IV класса СШ №_____ г._____

Справка выдана для представления в городскую библиотеку.

*Директор школы*_____

Разумеется, только при правильном заполнении пустых мест этой формы получаемая справка может быть признана действительной. Что же надо понимать под правильным заполнением формы? Каждое из пустых мест имеет свое назначение, легко угадываемое по контексту. Если форма заполнена неправильно, то справка является недействительной или же ложной (последнее, например, в том случае, когда первое пустое место заполнено фамилией человека, в действительности не являющегося учеником IV класса указанной в справке школы).

Рассмотрим простой математический пример, в котором также выполняется операция абстрагирования путем оставления пустых мест в предложениях. Так, мы хотим выразить свойство: «Каждое натуральное число больше нуля». Это свойство можно выразить для каждого натурального числа ($1>0$; $2>0$; $3>0$; ...), но мы не можем таким путем выразить это свойство для всех натуральных чисел, так как для этого потребовалось бы записать бесконечное множество таких предложений. Как же поступают? В языковых выражениях «$1>0$»; «$2>0$»; «$3>0$»; ...сохраняют лишь те знаки, которые являются общими, т. е. входят во все эти выражения, и опускают знаки «1», «2», «3», ... (имена конкретных чисел), которыми эти предложения отличаются. Тогда получают одно общее языковое выражение «$...>0$» с пустым местом, которое разрешается заполнять любым натуральным числом.

Для выражения более сложных форм, встречающихся в математике, язык «с пустыми местами» практически непригоден.

Для учащихся младших классов придумывают такой выход из затруднительного положения: пустые места, на которые подставляется одно и то же число, обозначаются с помощью пустых «коробок» или «окошек» одинаковой формы, например,

$$\square + \bigcirc = \bigcirc + \square.$$

Однако вряд ли можно долго заниматься и далеко продвинуться в математике с помощью такого языка. Это лишь педагогический шаг, довольно удачный, так как подводит к правильному представлению о переменной, как о знаке, чаще всего букве, играющей роль «держателя места» в математическом тексте для имен элементов определенного, заданного множества (области значений переменной). Очевидно, *долго задерживаться на этом промежуточном языке* так же нецелесообразно, как и полностью пренебрегать им, что наблюдается в традиционной методике, переходящей непосредственно к применению букв без достижения ясного представления об их роли.

Оперируя переменными, надо всегда иметь в виду области значений этих переменных. Так как переменная — элемент математического языка, а ее область значений — какая-то предметная область, свойства которой выражаются на этом языке, то связь между переменной и ее областью значений есть связь между языком и тем, что он выражает. Не учитывать эту связь означает оторвать язык от описываемой его средствами действительности, что приводит к формальным знаниям.

Формирование и развитие понятия переменной осуществляется в процессе изучения ее использования и роли в различных языковых образованиях.

4. Термы и формулы

4.1. Совокупность символов математического языка, в частности языка изучаемой в школе элементарной алгебры, называется *алфавитом* этого языка. Здесь мы имеем в виду обычно используемый язык школьной алгебры с алфавитом

$$A = \{0, 1, ..., 9, a, b, ..., x, y, z, +, \cdot, =, <, (,)\}$$

(другие, используемые в школьной алгебре символы определяются через знаки этого алфавита).

В приведенном алфавите, как в алфавите языка любой математической теории, различают следующие категории букв (напомним, что элементы алфавита называются его буквами):

а) имена предметов (предметные постоянные). В приведенном алфавите — это цифры 0, 1, ..., 9, служащие для конструирования по определенным правилам (десятичной системы счисления) имен чисел;

б) предметные переменные $a, b, \ldots, x, y, z$ (или одна из этих букв с индексом $x_1, x_2, \ldots$), принимающие значения из заданной области (в нашем примере из заданной области чисел; поэтому называются они также числовыми переменными);

в) функциональные буквы $(+, \cdot)$, служащие для обозначения операций;

г) предикатные буквы $(=, <)$, служащие для обозначения различных отношений;

д) скобки и другие знаки препинания (взятые уже из естественного языка).

Отметим одно весьма важное отличие языка школьной алгебры, и вообще школьной математики, от формализованных языков. В таком языке логический компонент не формализован и не символизирован. Вместо логических символов в нем используются соответствующие слова или словосочетания естественного языка НЕ; И; ИЛИ; ЕСЛИ..., ТО; ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА; ДЛЯ ВСЯКОГО; СУЩЕСТВУЕТ (или некоторые другие, применяемые в качестве синонимов). Поэтому язык школьной математики можно называть словесно-символическим, полуформальным.

Из таких же категорий букв состоит и алфавит языка школьной геометрии. В качестве имен точек, прямых и плоскостей применяются соответственно буквы: $A, B, C, \ldots$; $a, b, c, \ldots$; $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Строчные буквы латинского алфавита со стрелками сверху $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ используются как постоянные для обозначения имен векторов, а также в качестве переменных для векторов. Эти различные применения в языке геометрии одних и тех же букв обычно распознаются по контексту.

Например, в предложении «$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ для любого $\vec{a}$» ясно, что $\vec{a}$ — переменная для векторов (к тому же связанная квантором общности «для любого»). В предложении же «Обозначим через $\vec{a}$ вектор, определяемый парой точек ($A(0, 0)$, $B(1, 1)$), т. е. $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$» буквы A и B применяются в качестве имен для точек, а буква $\vec{a}$ — в качестве постоянной (имя вектора).

Функциональными буквами являются знаки $+, -, \cdot$, служащие для обозначения операций над векторами. Предикатными буквами будут $\parallel, \perp, =, \sim$, обозначающие отношения между геометрическими объектами.

Символы алфавита служат исходным «материалом», из которого конструируются по определенным правилам различные языковые выражения — аналоги слов и предложений естественного языка.

Всякое *выражение* математического языка (в широком смысле, включающем и традиционные «алгебраические выражения» и «формулы») представляет собой конечную последовательность символов из его алфавита, но не всякая такая последовательность символов является выражением математического языка. Семантический подход выделяет «выражения» как конечные последовательности символов алфавита, имеющие смысл; синтаксический подход — как последовательности символов, построенные по определенным правилам.

4.2. Множество всех выражений языка можно разбить на *элементарные*, состоящие из одной буквы, из одной цифры (или конечной последовательности цифр), и *сложные*, содержащие и другие символы алфавита, кроме букв и цифр.

Рассмотрим сначала выражения без переменных. Совершенно очевидно, что по смыслу легко установить, например, что «2+1» — выражение, а последовательность символов «2++» не является таковым. Действительно, символ «+» обозначает операцию над двумя числами, поэтому в выражениях языка он может стоять только между двумя символами, представляющими собой имена чисел или переменные для чисел.

Каков же смысл выражения «2+1»? Это выражение обозначает число — результат сложения чисел 2 и 1 (т. е. чисел, имена которых — символы «2» и «1»). Но это число имеет и другое имя — «3». Выражения «2+1» и «3», представляющие собой имена одного и того же числа, соединяются знаком «=»: «2+1=3». Полученная последовательность символов («2+1=3») тоже представляет собой выражение языка, но его смысл совершенно иной, чем смысл составляющих его выражений «2+1» и «3». Эти последние выражают числа, но если их соединить знаком =, получаем уже выражение *высказывания*.

Таким образом, рассматриваемые нами выражения (без переменных) можно разделить на два класса: 1) выражения, не содержащие знака отношения и обозначающие числа; 2) выражения, содержащие один из знаков отношений $=$, $<$ или $>$ и обозначающие высказывания о числах.

Аналогичное деление пригодно и для выражений, содержащих переменные.

Выясним смысл выражений с переменными, не содер-

жащих и содержащих знак какого-нибудь отношения (равно, меньше или больше). С этой целью сравним, например, выражения:

$$7+x; \qquad (1)$$

$$7+x=10;\ 7+x<10;\ 7+x>10. \qquad (2)$$

С синтаксической точки зрения каждое из выражений (2) отличается от выражения (1) тем, что содержит знак какого-то отношения ($=$, $<$ или $>$). Очевидно, что одного такого чисто синтаксического понимания этого различия явно недостаточно. Необходимо выяснить смысл этих выражений, т. е. применить к их изучению семантический подход. Пусть, например, область значений переменной x — множество $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Выражение (1) — *числовая форма*, выражающая числовую функцию числовой переменной, или отображение $A \longrightarrow B$ множества A на множество $B=\{8, 9, 10, 11, 12\}$; каждое же из выражений (2) — *высказывательная форма*, выражающая логическую функцию числовой переменной (предикат), или отображение $A \longrightarrow \{И, Л\}$ множества A на множество {И, Л}, состоящее из двух элементов И (истина) и Л (ложь). Это видно из сопоставления таблиц, определяющих данные функции:

x	$7+x$	$7+x=10$	$7+x<10$	$7+x>10$
1	8	Л	И	Л
2	9	Л	И	Л
3	10	И	Л	Л
4	11	Л	Л	И
5	12	Л	Л	И

Идея функции объединяет различные категории языковых форм. Числовая и высказывательная формы выражают функции: первая — числовую, вторая — логическую.

Рассмотренный пример показывает, как наряду с понятием числовой функции естественно и неизбежно возникает понятие *логической функции*, если мы хотим разъяснить учащимся смысл языковых выражений.

В выражении (1) область определения и область значений функции — числовые множества, в выражении (2) область определения — числовое множество, а область значений — множество {И, Л}.

Таким образом, мы различаем два класса выражений с переменными: 1) выражения, не содержащие знака отношения, представляющие собой числовые формы и опреде-

ляющие числовые функции числовой переменной (или числовых переменных); 2) выражения, содержащие знак отношения (равно, меньше или больше), представляющие собой высказывательные формы (они обращаются в высказывания при подстановке вместо переменных их значений) и определяющие логические функции числовой переменной (или числовых переменных).

4.3. Произведенный анализ приводит нас к следующей классификации выражений математического языка:

Эта классификация может служить основой для упорядочения терминологии и достижения лучшего понимания семантики языковых выражений в школьном преподавании алгебры.

Таким образом, различаем два класса выражений — *термы* и *формулы* (выражения, названные здесь термами, в школьной терминологии называются «алгебраическими выражениями» или просто «выражениями»). Соединив два терма знаком какого-нибудь из отношений «равно», «меньше», «больше», получаем формулу. Важно, чтобы учащиеся видели в каждой формуле записанное на математическом языке предложение. Если формула не содержит переменных, то предложение будет истинным или ложным высказыванием; если же формула содержит переменные, то предложение не есть высказывание, но обращается в истинное

или ложное высказывание при подстановке вместо переменных их значений.

Необходимо подчеркнуть, что речь идет не о введении в школьный курс математики каких-то новых терминов (наше изложение адресовано учителю), а о разъяснении учащимся семантики разного рода математических выражений. Это вполне осуществимо при сохранении традиционной школьной терминологии.

4.4. Не надо думать, что формулы встречаются только в алгебре. Широко используемые в обучении геометрии выражения $a \| b$, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, $\alpha \perp \beta$, как и $x=0$, $x<y$, $x+3=7$, представляют собой формулы.

Все перечисленные формулы по существу являются *элементарными предложениями.*

Математические предложения, с которыми мы имеем дело в обучении, в большинстве случаев не сводятся, однако, к элементарным. Из формул с помощью логических связок и кванторов (словесных выражений или символов, обозначающих различные логические операции над предикатами) определенным образом конструируются сложные (или составные) математические предложения.

Приведем несколько примеров:

1) **неверно, что** $x = 0$ (сокращенно $x \neq 0$);

2) $x<3$ **или** $x=3$ (сокращенно $x \leqslant 3$);

3) $x>1$ **и** $x<5$ (сокращенно $1<x<5$);

4) **если** $x=3$, **то** $x^2=9$;

5) **если** $AB=A_1B_1$ **и** $BC=B_1C_1$ **и** $CA=C_1A_1$, **то** $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$;

6) **если** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ **и** $\vec{a} \neq \vec{0}$, **то** $\vec{a} \perp \vec{b}$ **или** $\vec{b} = \vec{0}$;

7) **для любого** x **существует** y, **такое, что** $y=x^2$;

8) **для любых** x, y, **если** $x \neq y$, **то** $x<y$ **или** $y<x$

(в формальных теориях эти предложения тоже называются формулами (сложными или составными) и записываются на формализованном языке без применения слов).

Математическое содержание перечисленных предложений (1—8), как и всяких математических предложений, заложено в их элементарных составляющих, т. е. в формулах, из которых они сконструированы.

Логическая структура (или логическая форма) этих предложений определяется способом связи в них элементарных составляющих с помощью логических связок и кванторов. Иными словами, логическая структура математических предложений определяется совокупностью и по-

рядком применяемых в них логических связок и кванторов.

Истинностное значение (истинно (верно) или ложно (неверно)) математических предложений зависит от истинностных значений элементарных составляющих и от их логической структуры.

Например, предложение 5 представляет собой теорему (третий признак равенства треугольников), истинность которой устанавливается с помощью доказательства. Из тех же элементарных предложений (формул), из которых составлено предложение 5, можно составить и другие предложения, отличающиеся лишь логической структурой. Например, такие:

если $AB=A_1B_1$ **или** $BC=B_1C_1$ **или** $CA=C_1A_1$, **то** $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$ (отличается от предложения 5 лишь тем, что связка **и** всюду заменена связкой **или**, но оно уже ложно);

если $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$, **то** $AB=A_1B_1$ **и** $BC=B_1C_1$ **и** $CA=C_1A_1$ (истинно, следует из определения равенства треугольников);

если $\triangle ABC\neq\triangle A_1B_1C_1$, **то** $AB\neq A_1B_1$ **и** $BC\neq B_1C_1$ **и** $CA\neq C_1A_1$ (ложно);

если $\triangle ABC\neq\triangle A_1B_1C_1$, **то** $AB\neq A_1B_1$ **или** $BC\neq B_1C_1$ **или** $CA\neq C_1A_1$ (истинно, равносильно предложению (5), как контрапозиция).

Таким образом, можно сделать весьма важный для педагогики математики вывод о необходимости разъяснения учащимся в процессе обучения математике: а) семантики логических связок и кванторов (о чем шла речь в предыдущей лекции); б) математического содержания и логической структуры математических предложений (аксиом, теорем, определений).

5. Современный математический язык в школьном обучении

5.1. Под современным математическим языком понимается расширение обычно используемого в школьном обучении математического языка, включающего элементы теоретико-множественного и логического языков.

Как уже говорилось (см. гл. 2), отказ от теоретико-множественной концепции в построении школьной математики вполне оправдан. Однако этот отказ не исключает возможность использования некоторых простейших теоретико-множественных понятий и обозначений в качестве удобных вспомогательных средств выражения математического содержания.

Уже имеющийся опыт подтверждает эффективность разумного использования символов: $\in$, $\subset$, $\cap$, $\cup$ — начиная с V класса (а может быть, еще раньше); $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ — начиная с VII—VIII классов; $\forall$, $\exists$ — начиная с VIII—IX классов. При этом не предполагается сколько-нибудь развитая формализация этого логического компонента математического языка.

5.2. Рассмотрим несколько примеров записей предложений с использованием названных символов. Приведем различные формулировки и записи определения параллельных прямых:

1) две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются;

2) две прямые называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не имеют общей точки;

3) две прямые называются параллельными, если существует плоскость, в которой они обе лежат и не имеют общей точки;

4) по определению $a \parallel b$ тогда и только тогда, когда существует плоскость α, такая, что $a \subset \alpha$ **и** $b \subset \alpha$ **и** $a \cap b = \varnothing$;

5) $a \parallel b \overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow}$ существует плоскость α, такая, что $a \subset \alpha$ **и** $b \subset \alpha$ **и** $a \cap b = \varnothing$;

6) $a \parallel b \overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow} \exists\alpha\,(a \subset \alpha$ **и** $b \subset \alpha)$ **и** $a \cap b = \varnothing$;

7) $a \parallel b \overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow} \exists\alpha\,(a \subset \alpha \wedge b \subset \alpha) \wedge a \cap b = \varnothing$.

Нетрудно заметить, что все эти формулировки и записи эквивалентны, но с дидактической точки зрения не равноценны. Так, первая формулировка словесная, удобная для устного ответа; вторая отличается от первой тем, что опущены слова «в пространстве» и раскрыто, что означает «не пересекается»; третья — полная логическая словесная формулировка, не используемая в устной речи, но раскрывающая, что означает «лежат в одной плоскости» (иногда неправильно учащиеся считают, что прямые, моделируемые «двумя карандашами, которые лежат на столе», принадлежат одной плоскости (стола), а «двумя карандашами, которые мы держим в руках», не лежат в одной плоскости); четвертая — промежуточная словесно-символическая запись, неудобная ни в устной, ни в письменной форме; пятая — словесно-символическая запись, возможная в школьной математике, но неудобная из-за длинного словесного выражения квантора существования; шестая — словесно-символическая запись, удобная и целесообразная в обучении, но для ее применения необходимо ввести знак $\exists$ для квантора существования;

седьмая — символическая запись на логико-математическом языке.

Шестая и седьмая записи наглядно подтверждают, что слова **и** и **или** могут применяться в записях математических предложений на тех же правах, что и знаки $\wedge$ и $\vee$, и при этом запись предложения ничуть не удлиняется. Кроме того, эти записи наглядно подтверждают целесообразность введения в язык школьной математики специального знака для квантора существования.

Приведенные формулировки, разумеется, не исчерпывают все возможные выражения определения параллельности прямых. Очевидно, наиболее целесообразной для школьного обучения является первая словесная формулировка, взятая из школьного учебника геометрии А. В. Погорелова, и краткая, но полная шестая словесно-символическая запись.

Мы не обсуждаем здесь вопрос о том, какое из неэквивалентных определений параллельности прямых заслуживает предпочтения — приведенное или определение из учебника геометрии под редакцией З. А. Скопеца, в котором совпадение прямых рассматривается как частный случай параллельности, т. е.

$$a \parallel b \overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow} \exists\alpha\,(a \subset \alpha \text{ и } b \subset \alpha) \text{ и } (a \cap b = \varnothing \text{ или } a = b),$$

согласно которому отношение параллельности становится отношением эквивалентности.

Приведем несколько символических записей определений из курса алгебры и начал анализа:

функция $f(x)$ возрастающая:

$$\forall x_1,\ x_2 \in D_f\ \ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2));$$

функция $f(x)$ убывающая:

$$\forall x_1,\ x_2 \in D_f\ \ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2));$$

функция $f(x)$ периодическая:

$$\exists T \neq 0\ \ \forall x \in D_f\ \ (x - T \in D_f \text{ и } x + T \in D_f \text{ и } f(x) = f(x + kT)).$$

Эти записи не только точны, кратки и полны. Они вполне доступны учащимся старших классов и позволяют разъяснить простые правила получения точных отрицаний:

функция $f(x)$ не является возрастающей:

$$\exists x_1,\ x_2 \in D_f\ \ (x_1 < x_2 \text{ и } f(x_1) \geqslant f(x_2));$$

функция $f(x)$ не является убывающей:

$$\exists x_1,\ x_2 \in D_f\ (x_1 < x_2 \text{ и } f(x_1) \leqslant f(x_2));$$

функция $f(x)$ не является периодической:

$$\forall T \neq 0\ \exists x \in D_f\ (x - T \overline{\in} D_f \text{ или } x + T \overline{\in} D_f \text{ или } f(x + kT) \neq f(x)).$$

5.3. В экспериментальных учебниках геометрии (например: *Болтянский В. Г., Волович М. Б., Семушин А. Д.* Геометрия для 6, 7, 8 классов. М., 1972—1977) логические понятия и соответствующие обозначения детально разъясняются и широко используются в явном виде. Эксперимент по апробированию этих учебников, несомненно, представляет большой интерес и с точки зрения эффективности использования логического компонента математического языка (хотя, возможно, в них допущены некоторые излишества).

5.4. Вопрос об использовании элементов современного (логико-математического) языка в школьном обучении математике все еще является дискуссионным. Для эффективного методического решения его необходимы дальнейшие экспериментальные исследования, а также (что не менее важно) основательное овладение этим языком учителями.

Академик А. Н. Колмогоров справедливо замечает, что «нет никаких оснований бояться широкого введения в школу символических обозначений и формул математической логики...» (Математика в школе, 1969, № 3, с. 17).

6. Проблема трех языков

6.1. В педагогике математики существует так называемая «проблема трех языков». Это, во-первых, *язык ученика*, которым владеют учащиеся. Здесь язык понимается в широком смысле, включая и специальную математическую терминологию и символику, которыми учащиеся овладели в процессе предшествующего обучения, и разговорный язык. Это, во-вторых, тот *математический язык*, которому предстоит обучать школьников на данном этапе обучения. Наконец, в-третьих, это *язык обучения*, или *язык учителя*, т. е. тот язык, с помощью которого учитель осуществляет обучение второму языку, опираясь на первый, т. е. на язык ученика.

Совершенно очевидна значимость успешного решения этой проблемы на каждом уроке. Неудачный выбор языка обучения может иметь серьезные последствия и нередко приводит к непониманию учащимися того, что им объясняет учитель.

6.2. Проблема трех языков, как и многие другие педагогические проблемы, не может быть решена алгоритмически. Иными словами, не удается сформулировать строго детерминированное предписание о выборе языка обучения, пригодное для любого учебного материала и любого состава учащихся.

Успешное решение этой проблемы требует творческого подхода и умения выбрать язык обучения, адекватный языку учащихся и целям обучения. Это, однако, не означает, что нельзя сформулировать некоторые общие рекомендации, которые способствуют такому выбору.

Сформулируем несколько таких рекомендаций.

1. Приступая к обучению учащихся, учитель математики должен: а) хорошо знать язык начальной математики, которым должны были овладеть учащиеся младших классов; б) выяснить, как им практически владеют именно те конкретные учащиеся, которых предстоит обучать.

2. При подготовке к каждому уроку учитель должен иметь в виду постепенность расширения языка ученика. Слишком большое число новых терминов или символов на одном уроке может вызвать затруднения в усвоении соответствующих понятий.

3. Все введенные новые термины или символы целесообразно записывать на доске и их значение и смысл следует тщательно разъяснять.

4. При объяснении материала нежелательно применять такие термины или обороты речи, которые непонятны учащимся. Поэтому учителю необходимо знать не только, какой терминологией и символикой владеют учащиеся, но и их обиходный язык.

5. Если наблюдаются трудности в усвоении введенных новых терминов или символов и особенно в применении соответствующих понятий, необходимо повторно и более тщательно, возможно «другими словами», более близкими к языку учащихся, разъяснить их.

14. ВОСПИТАТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

1. Воспитывающий характер обучения математике

1.1. Воспитание «через обучение» — важный компонент воспитания человека вообще, хотя, разумеется, далеко не исчерпывает то, что обычно вкладывается в понятие «вос-

питание». Например, хотя учение — труд, воспитание в процессе обучения не может заменить воспитание трудом.

1.2. Воспитывающий характер обучения относится ко всем учебным предметам. Каждый учебный предмет имеет свои специфические воспитательные и развивающие функции, которые осуществляются лишь в результате соответствующей постановки преподавания, ориентированной на раскрытие идейного содержания, структуры и методов изучаемого предмета, его роли и места в изучении окружающего мира и практической деятельности человека. Более того, одни и те же воспитательные функции осуществляются в обучении различным предметам совершенно по-разному. Хотя эстетическое воспитание осуществляется, главным образом, в процессе преподавания литературы, музыки, изобразительного искусства, географии, биологии и некоторых других предметов, оно может осуществляться в какой-то мере и в процессе обучения математике. Однако это осуществимо совершенно иным путем, чем в преподавании литературы. Эстетические чувства порождаются различными особенностями этих предметов. В математике, например, красотой и изяществом доказательств и нестандартных решений задач или возможностью одной общей теорией описывать различные системы вещей.

Попытаемся кратко ответить на два вопроса: 1) каковы основные специфические воспитательные функции обучения математике; 2) каким должно быть преподавание, чтобы наилучшим образом осуществлялись эти функции.

1.3. Выделяем три основные воспитательные функции обучения математике. Это, во-первых, воспитание мировоззрения; во-вторых, воспитание культуры мышления; в-третьих, воспитание таких черт характера, как настойчивость, целеустремленность, трудолюбие и дисциплинированность. Рассмотрим эти воспитательные функции более детально, в методологическом и методическом аспектах.

Перечисленные воспитательные функции не являются результатом усвоения лишь математических знаний. Можно преподавать математику и так, что учащийся, получивший хорошую математическую подготовку, будет иметь искаженные мировоззренческие представления, низкую культуру мышления и т. д.

Изложенные основы теории обучения математике ориентированы на достижение воспитательных целей, в частности, на воспитание материалистического мировоззрения (см. гл. 5) и культуры мышления (см. гл. 8, 12).

Все, однако, зависит в конечном итоге от уровня практической реализации ТОМ, т. е. от подготовки и педагогического мастерства учителя.

2. Воспитание мировоззрения

2.1. Под мировоззрением обычно понимают систему взглядов на окружающий нас мир, на природу и общество, основанную на научных знаниях.

Воспитание научного мировоззрения — сложная и ответственная задача, стоящая перед каждым учителем и решаемая в процессе обучения предметам с учетом специфики каждого из них.

Особенность воспитания материалистического мировоззрения у школьников в процессе обучения их математике связана с высокой степенью общности и абстракции математических теорий.

2.2. Перед изучающим математику естественно возникают вопросы о предмете математики, об отношении этой науки к реальной действительности, о путях возникновения и развития математических понятий и теорий, о сущности математических абстракций, о методах, которыми пользуется математика для описания реальных явлений. Все это составляет предмет *методологии математики.*

Для учителя математики вопросы методологии математики имеют двоякое значение. Знание методологии математики необходимо, с одной стороны, для собственного математического образования (вряд ли можно быть образованным математиком без знания основных вопросов методологии математики), с другой стороны, для решения задачи воспитания мировоззрения школьников при использовании этих знаний определенным образом в их обучении. Но что означает «определенным образом»?

Здесь возникают три взаимосвязанные педагогические задачи: «ЧТО?», «ГДЕ?» и «КАК?», т. е. какие методологические вопросы могут включиться в обучение для решения задачи воспитания мировоззрения школьников, в каком месте школьного курса математики и как.

Однако вряд ли здесь уместно строго детерминированное предписание по решению перечисленных трех задач. Речь идет не об искусственном присоединении методологических вопросов к изучаемому материалу (что иногда встречается в практике обучения), а о таком построении обучения, при котором эти задачи решались бы естественным образом, т. е. освещение методологических вопросов вытекало бы из при-

нятой схемы обучения. Такую общую методическую схему обучения мы уже рассматривали как результат сочетания обучения математической деятельности с проблемным обучением (см. гл. 4). В нее естественным образом включаются важнейшие вопросы методологии математики: 1) связи математики с реальной действительностью; 2) развитие математических знаний под влиянием задач, возникающих вне математики, в других областях для удовлетворения потребностей этих областей знаний; 3) построение математических моделей как один из наиболее плодотворных методов математического исследования явлений действительности; 4) способы математических абстракций; 5) способы установления истинности в математике (аксиоматический метод).

2.3. Проиллюстрируем методический аспект проблемы несколькими примерами.

Решая различные по содержанию задачи, мы часто приходим к одному и тому же уравнению или к одной и той же системе уравнений. Возьмем две задачи.

З а д а ч а 1. Двое рабочих производят n деталей за a дней. Одному из них на изготовление этого количества деталей требуется на b дней больше, чем другому. За сколько дней может сделать n деталей каждый рабочий, если будет работать один?

З а д а ч а 2. Бассейн емкостью n м^3 наполняется двумя кранами за a часов. Один из кранов наполняет бассейн за число часов, на b большее, чем другой. За какое время может наполнить бассейн каждый из кранов в отдельности?

Решение этих задач приводит к одному уравнению.

$$\frac{n}{x}+\frac{n}{x-b}=\frac{n}{a} \tag{1}$$

или к одной системе уравнений

$$\left.\begin{array}{l} x-y=b; \\ \dfrac{n}{x}+\dfrac{n}{y}=\dfrac{n}{a}. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Уравнение (1) или система (2), равносильная (1), является «математической моделью» обеих задач, а также других задач иного содержания, но с той же структурой связей между величинами, которая и описывается уравнением (1) или системой (2).

Мы здесь пользуемся интуитивным представлением о «моделях». С целью правильного формирования этого пред-

ставления можно дать такое разъяснение: когда речь идет о «математической модели» явления, процесса или содержательной задачи, то обычно имеется в виду описание этого явления, процесса или задачи средствами какой-нибудь математической теории. В нашем случае мы это описание осуществили средствами алгебры с помощью уравнения или системы уравнений.

Обратимся к одному высказыванию В. И. Ленина: «Единство природы обнаруживается в «поразительной аналогичности» дифференциальных уравнений, относящихся к разным областям явлений (*Ленин В. И.* Соч., т. 18, с. 306).

Отмеченная здесь «поливалентность» (многозначность) абстрактных математических описаний (моделей) легко раскрывается на простейших примерах дифференциальных уравнений, которые стали предметом школьного обучения.

Например, простейшее дифференциальное уравнение

$$y' = -ky \tag{3}$$

и его решение

$$y = y_0 e^{-kx} \tag{4}$$

могут описать следующие явления: процесс распада радия (в этом случае формула (4) дает массу радия в момент x, если y_0 — масса радия в момент x_0); процесс изменения атмосферного давления в зависимости от высоты x над уровнем океана (в этом случае (4) — барометрическая формула); процесс изменения народонаселения (если прирост населения пропорционален количеству населения); процесс охлаждения тела при постоянной температуре окружающей среды (поскольку скорость остывания тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды) и т. д. Иными словами, уравнение (3) (или формула (4)) описывает любой процесс показательного роста или спада (при $k<0$ или $k>0$ соответственно), характеризующийся тем, что скорость изменения величины пропорциональна самой изменяющейся величине в данный момент.

Здесь можно разъяснить, что во многих случаях изучение некоторых явлений, процессов приводит к выявлению определенных связей между самим течением процесса и его скоростью, а в более сложных случаях и ускорением. Иными словами, при изучении явления, процесса можно выявить связи между искомой, пока неизвестной функцией, описывающей изучаемое явление, и производной функцией, описывающей скорость этого течения, а может быть и второй производной, описывающей ускорение, и т. д. Именно в таких случаях математическая модель явления, процесса

строится в виде дифференциального уравнения или системы таких уравнений.

Из нашего примера можно сделать и такой вывод: *при всем многообразии явлений природы существует определенное единство, наглядно раскрывающееся при построении математических моделей этих явлений.* Дифференциальное уравнение описывает не одно, а целый класс явлений, относящихся к разным областям, но объединяемых общей характеристикой, которая выражается этими дифференциальными уравнениями. Один раз решив уравнение (3), мы уже можем применить его решение (4) к любой задаче, приводящей к модели (уравнению) этого типа.

Рассмотренные примеры (таких примеров по различным темам школьного курса математики можно привести много) показывают, как вопросы методологии математики могут совершенно естественно «внедряться» в обучение.

3. Воспитание культуры мышления

3.1. Обычно математике приписывают особую роль в воспитании таких качеств, как *строгость, ясность* и *точность мышления*, которые можно объединить в понятие *культура мышления.*

Это обусловливается специфическим для математики стилем мышления, для которого характерно доведенное до предела доминирование логической схемы рассуждения над его содержанием, лаконизм, четкая расчлененность хода рассуждений, строгость доказательств и скрупулезная точность выражения средствами символического языка. Однако математика представляет собой лишь благодатную почву с большими потенциальными возможностями для воспитания культуры мышления, само же это воспитание является результатом соответствующей постановки обучения. В частности, эффективное в воспитательном отношении обучение математике должно включать не только строгие рассуждения, но и анализ этих рассуждений (см. гл. 13), не только доказательства (без доказательств нет математики), но и раскрытие методов доказательств.

3.2. Для воспитания строгости мышления основное — приучение учащихся к достаточности основания (полноценности аргументации, по выражению известного советского математика А. Я. Хинчина), к пониманию необходимости строгого доказательства, так как в математике нет и не может быть наполовину доказанных или почти доказанных утверждений.

В воспитании ясности и точности мышления важную роль играет символический язык математики при условии, как это уже было подчеркнуто, целесообразности его применения, правильного сочетания семантического и синтаксического подходов в процессе обучения. В этом направлении возможно весьма эффективное использование элементов логико-математического языка (в качестве средства нового вида наглядности — «логической наглядности»), вскрывающего структуру математических предложений и рассуждений (см. гл. 13).

Лаконизм, ясность (однозначность смысла) и точность символического языка математики способствуют воспитанию аналогичных качеств мышления и выражения мыслей не только в области математики. Эти качества, приобретенные в процессе изучения математики, распространяются на любую область деятельности человека. Иными словами, овладевший математическим стилем мышления человек переносит его на любую область своей деятельности, и это приносит большую пользу ему и обществу.

3.3. В математике разработано много алгоритмов для решения различных классов задач. Одна из целей математики и состоит в разработке алгоритмов для решения все новых и новых классов задач, возникающих как вне, так и внутри математики.

Естественно, что обучение математике на любом уровне неизбежно включает обучение выполнению строго детерминированных, алгоритмических (вычислительных или логических) процессов, а также поискам алгоритмов для решения новых классов задач (см. гл. 10).

Формулировка и применение алгоритмов связаны с умением четко формулировать новые и строго соблюдать установленные правила. Это умение — одно из качеств математического мышления — важно для каждого человека, независимо от рода его деятельности.

В любой сфере деятельности часто возникает потребность в составлении разного рода инструкций, предписаний, правил (например, правил движения, обращения с различными приборами, техники безопасности и т. д.). Но если составлять инструкции, предписания, правила, т. е. алгоритмы, приходится далеко не каждому человеку, то строго придерживаться определенных правил должен каждый. В этом отношении велика воспитательная роль математики, которая приучает человека и четко формулировать правила и строго придерживаться их. Но чтобы математика

выполняла эту воспитательную функцию, необходимо соответствующим образом строить обучение.

Обучение алгоритмам означает обучение учащихся самостоятельно искать и открывать алгоритмы для решения новых классов задач. Подобное обучение алгоритмам не только не умаляет творческого поиска, но и способствует развитию таких важных качеств творческого мышления, как интуиция, сообразительность, гибкость. Обучение должно ориентироваться на соразмерное развитие алгоритмического и эвристического компонентов математического мышления (см. гл. 11).

4. Воспитание определенных черт характера

4.1. Влияние обучения на воспитание определенных положительных черт характера может быть достигнуто при обучении любому предмету, если постановка обучения ориентирована на *воспитание и поддержание устойчивого интереса учащихся к учению.*

Интерес к учению способствует преодолению встречающихся трудностей, воспитанию любознательности, настойчивости, целеустремленности, трудолюбия. Отсутствие интереса учащихся к учению является серьезным препятствием в достижении этих воспитательных целей.

Для решения данной педагогической проблемы необходимы, хотя и недостаточны, два условия, которые Д. Пойа в книге «Математическое открытие» (М., 1976) называет первыми среди десяти заповедей учителя, составляющих, по его мнению, основы педагогического мастерства.

Первую заповедь (интересуйтесь своим предметом) Пойа считает главной, ибо существует только один безотказный метод преподавания: если учитель увлечен своим предметом, то будет увлечен и весь класс. Обращаясь к учителям, Пойа говорит: «Если предмет не интересует вас, откажитесь от преподавания, ибо вы никогда не сможете излагать его хорошо. Интерес — ...это совершенно необходимое условие, которое, однако, еще не является достаточным. Самая искренняя заинтересованность и богатство методических уловок не помогут вам хорошо объяснить другим то, что вы сами понимаете плохо. Этого замечания должно быть достаточно, чтобы сделать очевидной вторую заповедь учителя: знайте свой предмет» (Д. Пойа, с. 305—307).

Нельзя не согласиться с Пойа: интерес и глубокие знания предмета учителем — необходимые, но недостаточные

условия воспитания интереса учащихся к предмету. Необходимые, потому что без них невозможно воспитание интереса учащихся к предмету; недостаточные, потому что, зная свой предмет и интересуясь им, учитель еще должен уметь преподавать его так, чтобы свой интерес к предмету передать учащимся.

4.2. Проблема воспитания и поддержания устойчивого интереса учащихся к учению имеет общедидактический и конкретно-методический аспекты. Сформулированные условия (см. 4.1) носят общедидактический характер. Однако вызвать у учащихся интерес к предмету, очевидно, нельзя без учета специфики предмета и эта педагогическая проблема решается по-разному для различных учебных предметов. Так, для формирования интереса учащихся к изучению математики имеются такие же богатые возможности, как и к изучению литературы, хотя их реализация намного сложнее. Можно сказать, что в математике эти возможности заложены «глубже», чем в литературе. Чтобы добраться до этих глубин, выявить их, вывести на поверхность, учитель должен проявить все свое педагогическое мастерство.

Проиллюстрируем сказанное одним примером. Решение нестандартных задач (см. гл. 11) «бросает» настоящий вызов интеллекту. Ведя за собой учащихся в поиске решения, учитель приучает их к напряженной мыслительной работе, которая затем компенсируется радостью открытия. *Напряженность поиска* и *радость открытия* — эмоциональные факторы, способствующие воспитанию настойчивости, целеустремленности и трудолюбия.

Вообще обучение познавательной деятельности имеет более высокий воспитательный эффект, чем обучение готовым знаниям. Одно дело, когда учитель сам все излагает, сообщает учащимся готовые знания, которые они должны лишь заучивать, совсем другое, когда учащимся приходится самим, разумеется, не без помощи учителя, усваивать новое.

Изложенная концепция теории обучения математике, основанная на дидактически целесообразном сочетании обучения готовым знаниям и познавательной деятельности, ориентирована на достижение воспитательных целей, сформулированных в «Основных направлениях реформы общеобразовательной и профессиональной школы».

Часть 2. ОСНОВЫ ПРАКТИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

15. ЧИСЛО. ОБЩАЯ МЕТОДИКА

1. Содержание

1.1. Число — одно из основных понятий математики, в том числе и школьного курса. Числа изучаются и применяются в школьном курсе, начиная с первого и заканчивая выпускным классом.

Овладение «числовым аппаратом», т. е. не только понятием числа, но и алгоритмами выполнения операций над числами, а также структурными особенностями числовых систем, является основой всего математического образования и необходимо там, где решение возникающих задач должно доводиться до числового результата.

1.2. Программа 1981 г. (базисная) определяет содержание и объем знаний и навыков учащихся в области учения о числе следующим образом: в IV—V классах — овладеть навыками вычислений с натуральными и целыми числами, обыкновенными и десятичными дробями; в VI—VIII классах — обобщить и систематизировать сведения о действительных числах; развить и закрепить вычислительные навыки; в IX—X классах — расширить объем сведений о числах путем ознакомления с комплексными числами и действиями над ними.

В программе 1970 г. комплексные числа были исключены из школьного курса. До этого тема «Комплексные числа» изучалась недостаточно эффективно. Учащиеся знакомились лишь с алгебраической формой комплексных чисел и их геометрической интерпретацией. Никакие приложения не рассматривались.

Программа 1981 г. «возвращает» комплексные числа в школьный курс, придавая этим самым учению о числе определенный законченный вид. К тому же предполагается более содержательное изучение комплексных чисел, включая их тригонометрическую форму.

2. Традиционная методика

2.1. Число — традиционная тема школьного курса, и методика изучения различных классов чисел имеет длительные традиции. Положительное в установившейся методике

состоит в том, что постепенное расширение числовых множеств обосновывается на примере задач, неразрешимых с помощью множества известных чисел.

Однако эта методика носит в определенном смысле односторонний характер. Она уделяет основное внимание самим числам, а структурные особенности изучаемых числовых множеств раскрывает недостаточно. Вследствие такого одностороннего изучения чисел учащиеся знают, например, смысл числителя и знаменателя дроби, но плохо разбираются в свойствах операций над дробями (в алгебраической структуре числового множества) и в отношениях порядка (в порядковой структуре).

2.2. Установившаяся методика обладает и другими недостатками. Многие учащиеся, в том числе и выпускники школы, имеют слабые вычислительные навыки, не понимают отношений между различными классами чисел, недостаточно владеют приближенными вычислениями, не имеют представления об общей идее развития понятия числа.

3. Различные схемы развития понятия числа

3.1. Понятие натурального числа возникло на заре человеческой цивилизации как отражение простейших потребностей деятельности людей. Вполне естественно, что и современное учение о числе базируется на арифметике натуральных чисел. Дальнейшее развитие этого учения состоит в последовательном расширении множества натуральных чисел по следующей схеме:

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C.$$

3.2. В установившейся школьной практике до сих пор сохраняется историческая последовательность развития понятия числа, которая отличается от приведенной схемы тем, что дроби исторически появились намного раньше отрицательных чисел. Уже древнегреческие математики пользовались положительными дробями, в то время как многие математики XVI в. еще не признавали отрицательных чисел.

«Историческая» схема

$$N_0 \subset Q^+ \subset Q \subset R \subset C$$

уступает в логической стройности приведенной схеме (см. 3.1.), которую можно назвать «логической», но заслуживает предпочтения из дидактических соображений.

Школьная схема обычно обосновывается тем, что понятие дроби (положительной) доступнее пониманию учащихся, чем понятие отрицательного числа. Вообще соображения психолого-педагогического порядка, касающиеся доступности учебного материала, могут служить достаточным основанием для отклонения в школьном обучении от логики научной системы.

В первоначальном варианте проекта программы 1968 г. предусматривалась реализация в школьном обучении «логической» схемы развития понятия числа. Были проведены эксперименты по расширению множества N натуральных чисел до множества Z целых чисел уже в IV классе. Однако в дальнейшем принятая программа (1970) возвратилась к исторической схеме, предусматривая лишь изучение арифметики десятичных дробей раньше арифметики обыкновенных дробей.

Программа 1981 г. устанавливает следующую последовательность расширения понятия числа в IV—V классах: натуральные числа и нуль, обыкновенные дроби, десятичные дроби, положительные и отрицательные числа и в заключение в виде обобщения целые и рациональные числа.

4. Раскрытие идеи развития понятия числа в школьном обучении

4.1. Построение расширения числового множества должно удовлетворять четырем условиям. Пусть множество A расширяется до множества B. Тогда эти четыре условия сформулируются следующим образом:

1) множество A есть подмножество B $(A \subset B)$;

2) все операции, которые выполняются в множестве A, определяются и в множестве B, причем так, что если применить эти определения к элементам из A, то получим те же результаты, что и при выполнении операций по правилам, введенным в A. Кроме того, свойства операций, имевшие место в A, имеют место и в B;

3) в множестве B выполнима операция, которая невыполнима в A (в этом условии заключена основная цель расширения множества A);

4) расширение B должно быть «минимальным» среди всех возможных расширений множества A, удовлетворяющих условиям 1—3, т. е. таким, чтобы не существовало никакого подмножества B, содержащего A (но не совпадающего с ним) и удовлетворяющего тем же условиям.

4.2. Возможны различные пути осуществления расшире-

ния числового множества, удовлетворяющего условиям 1—4. Можно строить множество B как новое множество чисел, а затем отождествить некоторое его подмножество с множеством A (строго говоря, устанавливается изоморфизм между некоторым подмножеством B и множеством A). Вначале создается впечатление, что и отрицательные, и положительные числа суть новые числа, и только впоследствии положительные числа отождествляются с ранее известными. Однако это первое впечатление способствует формированию у учащихся неправильного представления о том, что положительные числа отличны от известных из арифметики чисел, иногда неправильно называемых «числами без знака» или «арифметическими».

Педагогические соображения подсказывают нам иной путь расширения понятия о числе в школьном обучении. Вместо того чтобы образовать новое расширенное числовое множество B, содержащее подмножество, изоморфное A, мы дополняем известное нам множество A новыми числами, получая таким образом новое расширенное множество. Иначе говоря, вместо того, чтобы конструировать расширенное множество B, а затем показать, что $A \subset B$, мы дополняем множество A множеством $\overline{A}$ и образуем расширенное множество $B = A \cup \overline{A}$. Это осуществлено при введении отрицательных чисел в учебнике Н. Я. Виленкина и др. «Математика, 5 класс» (М., 1970). Переход от числового луча, на котором в виде точек изображаются все неотрицательные рациональные числа, к числовой прямой, на которой изображаются все рациональные числа, и означает дополнение множества Q^+ неотрицательных рациональных чисел множеством Q^- отрицательных рациональных чисел, в результате чего и получается множество Q всех рациональных чисел ($Q = Q^+ \cup Q^-$).

4.3. Важнейшим моментом процесса расширения понятия о числе в школьном обучении является раскрытие идеи этого расширения, разъяснение основной его цели. Мы не можем ограничиваться в обучении чисто формальным обоснованием необходимости введения новых чисел для обеспечения выполнимости операций. Учащимся было бы непонятно, почему мы добиваемся, чтобы, например, операция вычитания всегда выполнялась. Может быть практика, жизнь не требуют, чтобы мы умели вычитать из меньшего числа большее. В таком случае различные расширения числового множества выглядели бы для учеников чисто теоретическими увлечениями, не вызванными потребностями практики.

Поэтому в школьном обучении перед введением новых чисел приводятся обычно примеры практических задач, неразрешимых (в смысле не всегда разрешимых) в известном множестве чисел. Чтобы сделать эти задачи разрешимыми, мы и расширяем имеющееся множество чисел. Однако эти потребности практики обычно не переводятся на математический язык, т. е. не показывается, что они равносильны потребности в выполнимости определенной математической операции. Например, необходимость введения отрицательных чисел обосновывается обычно с помощью задач, в которых фигурируют направленные величины, изменяющиеся в двух противоположных направлениях, однако при этом не показывается, что неразрешимость этих задач в множестве неотрицательных чисел обусловлена тем, что вычитание не всегда выполнимо в этом множестве.

Иногда в школьном обучении необходимость введения новых чисел объясняется, с одной стороны, потребностями практики, а с другой — как будто не связанными с ней потребностями математики, что является методологической ошибкой. Разумеется, в математике имеются внутренние потребности, непосредственно не обусловленные практикой. Классическим примером этого могут служить мнимые числа, которые возникли исключительно из внутренних потребностей математики. Однако в конечном итоге потребности математики обусловлены потребностями практики. Мнимые числа получили впоследствии весьма реальное истолкование и важные приложения вне математики.

На примере развития понятия о числе мы и должны показать, как математика развивает и совершенствует свой аппарат под влиянием потребностей практики.

Получается следующая схема обучения: от потребностей практики в разрешимости задач — к потребностям математики в выполнимости операций и от этих последних — к новым числам, вооружающим математику средствами для удовлетворения потребностей практики. В этой схеме обучения реализуется положение о пути познания, принятое нами в качестве одного из исходных.

5. Общая методика введения новых чисел

5.1. Исходя из предыдущего, можно определить общую методическую схему введения новых чисел.

а) Прежде всего необходимо показать недостаточность известного нам универсального числового множества (т. е. множества всех чисел на данном этапе обучения), а

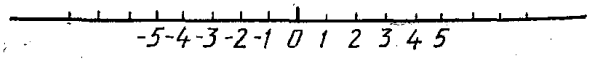


Рис. 53

следовательно, и необходимость его расширения. С этой целью рассматриваются специально подобранные задачи. Если, например, нам надо показать недостаточность множества Q^+ и необходимость введения отрицательных чисел, мы можем рассмотреть задачу такого типа: «Катер отошел от пристани на a *км* вниз по реке, затем развернулся и прошел b *км* вверх по реке. Где находится сейчас катер?»

Решение этой задачи приводит к вычислению разности

$$x=a-b, \qquad (1)$$

выражающей (в километрах) расстояние катера от пристани в определенном направлении (вниз по реке).

Если, например, $a=50$ и $b=40$, то получаем $x=10$ и ответ на вопрос задачи: катер находится на расстоянии 10 *км* от пристани вниз по реке. Если $a=50$ и $b=50$, то получаем $x=0$ и ответ на вопрос задачи: катер находится у пристани (здесь необходимо подчеркнуть реальный смысл числа 0, характеризующего в рамках данной задачи определенное положение катера; в этом отношении оно не отличается от других чисел). Если же $a=40$ и $b=50$, то решение задачи по формуле (1) приводит к вычитанию из меньшего числа большего, что невозможно в множестве Q^+. Здесь и обнаруживается недостаточность этого множества, а вместе с этим и необходимость его расширения таким образом, чтобы задача была разрешима по формуле (1) в любых случаях, в том числе и когда a меньше b.

б) Более глубокий анализ последнего случая, когда рассматриваемая задача неразрешима по формуле (1) в известном множестве чисел, подсказывает нам и путь введения новых чисел.

Катер отошел от пристани на 40 *км* вниз по реке, затем, возвращаясь, прошел вверх по реке 50 *км*. Пройдя первые 40 *км*, он проплыл мимо пристани и еще вверх по реке 10 *км*. Следовательно, теперь он находится на расстоянии 10 *км* от пристани, но в обратном направлении — вверх по реке. Мы не можем получить этот результат из формулы (1), так как в этом случае вычитание невыполнимо в Q^+. Наши числа (из Q^+) характеризуют изменение величины лишь в одном направлении. Это наглядно представляется

изображением чисел из Q^+ точками, расположенными на луче.

Рассматриваемая задача подсказывает необходимость такого расширения этого числового множества, чтобы точкам прямой, симметричным точкам луча, изображающим числа из Q^+, тоже соответствовали числа. Эти соображения приводят нас к расширению множества Q^+ с помощью так называемой процедуры *симметризации*. Симметричным относительно начала 0 точкам (рис. 53) ставятся в соответствие *симметричные* или *противоположные* числа a (или $+a$) и $-a$, характеризующие одно и то же расстояние, но противоположные направления. Расстояние характеризуется *абсолютной величиной*, направление — *знаком числа*.

Возвращаясь к нашей задаче, находим, что в расширенном множестве чисел формула (1) в случае, когда $a=40$ и $b=50$, дает $x=-10$, что в рамках данной задачи означает: катер находится от пристани на расстоянии 10 *км* вверх по реке (если результат $x=10$ понимался в смысле «катер находится на расстоянии 10 *км* от пристани вниз по реке»).

5.2. Рассмотрим еще один пример.

Недостаточность множества Q рациональных чисел и необходимость введения новых иррациональных чисел обычно обосновывается с помощью задач измерения (в случае несоизмеримости измеряемой величины с единицей) и извлечения квадратного корня (из положительных рациональных чисел, не являющихся полными квадратами).

Первая из этих задач практическая, вторая — математическая. Легко показать, что первая сводится ко второй. Достаточно рассмотреть единичный квадрат. Измерение его диагонали приводит к извлечению корня квадратного из неполного квадрата (к $\sqrt{2}$, не являющемуся рациональным числом).

И в этих задачах неразрешимый случай подсказывает нам путь расширения множества Q.

Применяя в случае несоизмеримости измеряемого отрезка с единичным ту же процедуру, что и в случае соизмеримости, мы обнаруживаем, что процесс измерения бесконечен и приводит к новому объекту — бесконечной десятичной непериодической дроби, не выражающей рациональное число. К какому же выводу мы приходим, извлекая корень квадратный из 2 по известному алгоритму извлечения корня квадратного (процесс извлечения корня квадратного из 2 не может быть конечным, так как у нас получилась бы конечная десятичная дробь, выражающая рациональное число, а

$\sqrt{2}$ не есть рациональное число (это раньше доказывается известным способом). Следовательно, этот процесс бесконечен и дает бесконечную десятичную дробь, которая не может быть периодической, так как в противном случае мы получили бы рациональное число. Значит, этот процесс приводит к бесконечной десятичной непериодической дроби).

Таким образом мы приходим к понятию вещественного числа как числа, представимого в виде бесконечной десятичной дроби (если эта дробь — периодическая, то вещественное число — рациональное, если же она — непериодическая, число — иррациональное).

5.3. В какой-то мере аналогичная ситуация может быть использована для показа недостаточности, а следовательно, и необходимости расширения множества R действительных чисел.

Общая задача «Решить уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a, b, c \in R$», для случая, когда $D = b^2 - 4ac < 0$, неразрешима в множестве R. Иными словами, множество R недостаточно для решения любого квадратного уравнения с коэффициентами из этого же множества.

Для достижения разрешимости поставленной общей задачи надо расширить множество R. Расширение, удовлетворяющее поставленному условию, можно осуществить присоединением к множеству R одного нового числа, а именно корня уравнения $x^2 + 1 = 0$, т. е. $\sqrt{-1}$, которое обозначают через i. Тогда корни любого квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ при $D < 0$ будут иметь вид $\frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a}$, т. е. $m + ni$, где $m, n \in R$.

Множество C чисел вида $m + ni$, где $m, n \in R$, называется *множеством комплексных чисел*.

Как видно, $R \subset C$ (комплексное число $m + ni$ при $n = 0$ является действительным числом). К этому же множеству C приводит и другой подход, связанный с геометрической интерпретацией чисел.

Между множеством R действительных чисел и множеством точек прямой с помощью координатной системы устанавливается взаимно однозначное соответствие, т. е. эти множества эквивалентны.

Рассмотрим теперь координатную плоскость. Для установления такого соответствия между точками плоскости и числами множества R уже недостаточно. Здесь с каждой точкой плоскости взаимно однозначно сопоставляется уже пара действительных чисел, координаты точки, т. е. множе-

ство точек плоскости эквивалентно множеству R^2 пар действительных чисел.

Это подсказывает идею: расширить множество R так, чтобы получить множество чисел, эквивалентное множеству точек плоскости, можно, принимая пару действительных чисел за новое, *комплексное* число. Таким образом, комплексное число можно задать парой действительных чисел. Однако определение множества комплексных чисел этим не завершается. Вместе с заданием самого комплексного числа необходимо ввести две операции над комплексными числами — сложение и умножение:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2); \quad (1)$$

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1). \quad (2)$$

Нетрудно заметить, что комплексные числа вида $(a, 0)$ соответствуют точкам прямой (оси абсцисс). Поэтому их можно отождествить с действительными числами, т. е.

$$(a, 0) = a. \quad (3)$$

Числа вида $(0, b)$ соответствуют точкам оси ординат. Чтобы выяснить, что это за числа, рассмотрим простейшее число этого вида $(0, 1)$ и возведем его в квадрат, пользуясь определением произведения (2): $(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$, т. е. $(0, 1)$ — число, квадрат которого равен -1, или $(0, 1)^2 = -1$. Как видно, совершенно другим путем мы пришли к корню уравнения $x^2 + 1 = 0$, который мы обозначили через i. Таким образом, $(0, 1) = i$.

Используя (2), можно любое число вида $(0, b)$ представить так:

$$(0, b) = (b, 0)(0, 1) = bi. \quad (4)$$

Так как любое комплексное число (a, b), используя (1), можно записать в виде суммы $(a, b) = (a, 0) + (0, b)$, то, учитывая (3) и (4), получаем $(a, b) = a + bi$.

Выражение $a + bi$ называется *алгебраической формой* комплексного числа.

Как видно, во втором случае мы пришли к тому же множеству C комплексных чисел.

Если теперь перемножить два комплексных числа в алгебраической форме по правилу умножения двучленов:

$$(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1),$$

то получим тот же результат, что и по определению (2):

$$(a_1b_1)(a_2b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1).$$

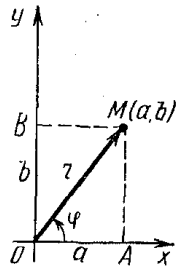


Рис. 54

Этим совпадением можно оправдать такое определение умножения.

Комплексные числа интерпретируются геометрически не только точками плоскости, но и радиус-векторами этих точек. Действительно, так как всякая точка $M(a, b)$ плоскости может быть взаимно однозначно сопоставлена вектору $\overrightarrow{OM}(a, b)$, то и всякому комплексному числу (a, b) можно взаимно однозначно сопоставить вектор $\overrightarrow{OM}(a, b)$ (рис. 54).

Но вектор $\overrightarrow{OM}$ может определяться и полярными координатами (r, φ), где r — длина вектора, а φ — угол AOM. Для соответствующего комплексного числа (a, b) или $a + bi$ r называется *модулем*, а φ — *аргументом*.

Нетрудно определить a и b через r и φ и обратно:

1) из $\triangle OAM$ (см. рис. 54) получим: $OA = a = r\cos\varphi$; $AM = b = r\sin\varphi$. Следовательно, $a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Выражение $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется *тригонометрической формой* комплексного числа;

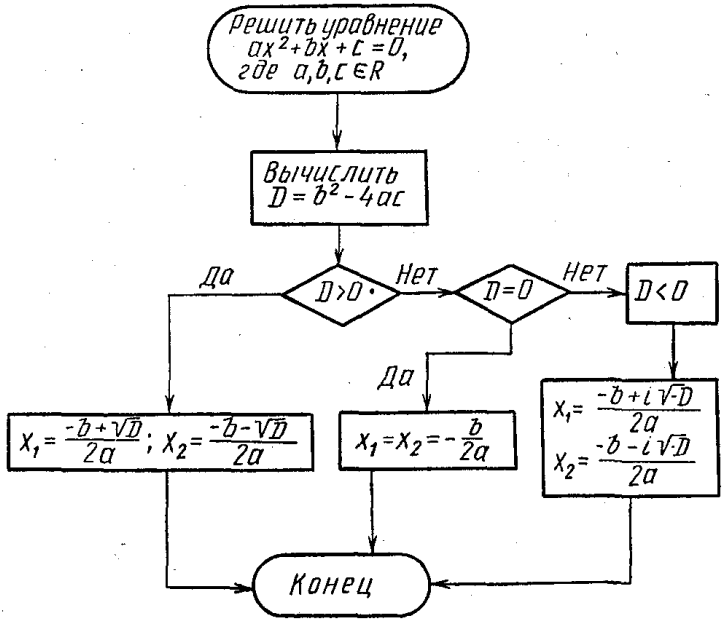


Рис. 55

2) из того же $\triangle OAM$ находим: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$.

Так, решение общей задачи «Решить в множестве C уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a, b, c \in R$» можно изобразить в виде схемы алгоритма, представленной на рис. 55.

16. ЧИСЛО. КОНКРЕТНАЯ МЕТОДИКА [1]

1. Числовые множества

1.1. Остановимся кратко на изучении порядковой и алгебраической структур множеств N, Z, Q, R на различных этапах школьного обучения. Результатом этого изучения должно быть умение выпускников средней школы охарактеризовать известные им числовые множества примерно так:

1) множество N натуральных чисел — бесконечное, упорядоченное, дискретное, с начальным элементом и без конечного элемента, замкнутое относительно сложения и умножения и незамкнутое относительно вычитания и деления;

2) множество Z целых чисел — бесконечное, упорядоченное, дискретное, без начального и конечного элементов, замкнутое относительно сложения, умножения и вычитания, незамкнутое относительно деления;

3) множество Q рациональных чисел — бесконечное, упорядоченное, без начального и конечного элементов, всюду плотное, замкнутое относительно сложения, умножения, вычитания и деления (за исключением, разумеется, деления на 0, которое исключается);

4) множество R вещественных чисел — бесконечное, упорядоченное, без начального и конечного элементов, всюду плотное, полное, замкнутое относительно сложения, умножения, вычитания и деления, а также относительно операции определения предела любой сходящейся последовательности вещественных чисел (непрерывное).

Рассмотрим вопросы изучения структуры каждого из множеств N, Z, Q, R.

---

[1] Рассматриваемые в этой главе вопросы и методика их изучения предназначены, главным образом, для факультативных занятий и классов с углубленным изучением математики. Однако частично этот материал может найти некоторое применение на уроках в обычных классах.

2. Натуральные числа

2.1. Как известно, изучение натуральных чисел начинается с первого класса. Совершенно очевидно, что изучение этих чисел в начальных классах не может обеспечить понимание учащимися свойств порядковой и алгебраической структур множества натуральных чисел. Но множество N является основой для построения других числовых множеств. Поэтому без понимания структуры множества N нельзя достичь понимания структуры множеств Z, Q, R.

Свойства структуры порядка $[N, <]$ и алгебраической структуры $[N, +, \cdot]$ должны быть предметом изучения в связи с развитием понятия числа в школьном курсе.

2.2. Уже в начальных классах учащиеся в состоянии понять, что отношение «меньше» устанавливает определенный *порядок* в множестве натуральных чисел. Это можно разъяснить с помощью упражнений по упорядочению посредством этого отношения конечных подмножеств натуральных чисел. Запись показывает нам правомерность высказываний «b следует за a» или «a предшествует b», если $a<b$.

В дальнейшем на базе отношения «меньше» можно разъяснить более сложные отношения: «лежит между» и «непосредственно следует за».

Отношение «лежит между» сложно в том смысле, что предложение, выражающее это отношение через отношение «меньше», имеет сложную логическую структуру: «c лежит между a и b» означает «$a<c$ **и** $c<b$ **или** $b<c$ **и** $c<a$». Это отношение наглядно изображается в геометрической интерпретации чисел точками прямой, и его название заимствовано из геометрии.

Отношение «непосредственно следует за» сложно в том же смысле: «b непосредственно следует за a» означает $a<b$ **и не существует** числа x, такого, что $a<x$ **и** $x<b$, или, используя отношение «лежит между», «$a<b$ **и не существует** числа x, лежащего между a и b». На более позднем этапе обучения определение отношения «непосредственно следует за» может быть записано на точном языке.

Обозначим через x' число, непосредственно следующее за x. Тогда

$$y = x' \Leftrightarrow x<y \text{ и } \overline{\exists z}(x<z \text{ и } z<y)$$

или

$$y = x' \Leftrightarrow x<y \text{ и } \forall z\,(z \leqslant x \text{ или } y \leqslant z)$$

(трудно переоценить значение подобных кратких, ясных и точных записей для усвоения выражаемого ими содержания).

С помощью отношения «непосредственно следует за» определяется и свойство *дискретности* структуры $(N, <)$; для каждого числа из N существует в этом же множестве число, непосредственно следующее за ним:

$$\forall x \exists y (y = x')$$

или

$$\forall x \exists y (x < y \text{ и } \forall z (z \leqslant x \text{ или } y \leqslant z)).$$

Свойство дискретности обычно принимается в качестве одной из аксиом, характеризующих структуру $[N, <]$.

2.3. Учащихся старших классов целесообразно ознакомить с системой аксиом, характеризующей структуру $[N, <]$:

$$\forall x \overline{(1 = x')} \text{ или } \overline{\exists x} (1 = x') \qquad \text{(A1)}$$

(не существует натурального числа, такого, что 1 непосредственно следует за ним, т. е. множество N имеет начало — 1);

$$\forall x \exists y (y = x') \qquad \text{(A2)}$$

(для всякого натурального числа существует непосредственно следующее за ним число, т. е. свойство дискретности);

$$\forall x \forall y (x = y \Rightarrow x' = y') \qquad \text{(A3)}$$

(для всякого натурального числа не существует более одного непосредственно следующего за ним натурального числа);

$$\forall x \forall y (x' = y' \Rightarrow x = y) \qquad \text{(A4)}$$

(всякое натуральное число непосредственно следует не более чем за одним натуральным числом);

$$P(1) \text{ и } \forall x (P(x) \Rightarrow P(x')) \Rightarrow \forall y P(y) \qquad \text{(A5)}$$

(аксиома *полной* или *математической индукции:* если 1 обладает некоторым свойством P и если для всякого натурального числа из того, что оно обладает свойством P, вытекает, что и непосредственно следующее за ним число обладает этим свойством, то всякое натуральное число обладает свойством P).

Нетрудно заметить, что аксиомы A1 — A4 выражают вполне очевидные свойства и их понимание не вызывает

затруднений. Этого нельзя сказать об аксиоме А5 математической индукции, служащей формальной основой одноименного способа доказательства.

2.4. В традиционной практике преподавания аксиома математической индукции не рассматривается, хотя метод математической индукции изучается на внеклассных, факультативных занятиях. Но доказательство методом математической индукции, лишенное своей формальной основы — аксиомы А5, несостоятельно, так как по существу остается незавершенным.

Обычно в школьной практике индуктивное доказательство заканчивают рассуждением: «Так как теорема (доказываемая) верна для 1 и из того, что она верна для n, следует, что она верна и для $n+1$, то она верна и для числа 2; так как она верна для 2, то на том же основании она верна и для $2+1$, т. е. для 3, и т. д. Следовательно, она верна для любого натурального числа». Слова «и т. д.» свидетельствуют о незавершенности, а по существу о незавершимости этого рассуждения, состоящего из бесконечного числа шагов.

Роль аксиомы математической индукции состоит в том, что она позволяет заменить это бесконечное индуктивное рассуждение конечным дедуктивным.

Если нам надо доказать, что $\forall y\, P(y)$, то мы строим следующее доказательство:

1) $P(1)$ (устанавливается непосредственной проверкой);

2) $\forall x (P(x) \Rightarrow P(x'))$ (принимая $P(x)$ за истинное, устанавливаем и истинность $P(x')$);

3) $P(1)$ **и** $\forall x (P(x) \Rightarrow P(x'))$ (из 1 и 2 по ВК);

4) $P(1)$ **и** $\forall x (P(x) \Rightarrow P(x')) \Rightarrow \forall y\, P(y)$ (по (А5));

5) $\forall y\, P(y)$ (из 3 и 4 по ПЗ).

Приведем пример для иллюстрации этой схемы доказательства.

Пусть $P(x)$ обозначает свойство (одноместный предикат, логическую функцию числовой переменной x)

$$1+2+3+\ \ldots\ +x=\frac{x(x+1)}{2}. \qquad (1)$$

Нам надо доказать, что $\forall x P(x)$ — истинное высказывание, т. е. что (1) верно для всякого натурального x. Подставив 1 вместо x в (1), получим $1=\frac{1\cdot 2}{2}$, т. е. $P(1)$ — истинное высказывание.

Теперь допустим, что (1) верно для произвольного, но фиксированного x (здесь x уже не переменная, а имя определенного числа), и докажем, что оно верно и для x' (или $x+1$), т. е. что $1+2+3+\ldots+x'=\frac{x'(x'+1)}{2}$ — истинное высказывание. Действительно, $1+2+3+\ldots+x+x'=$ $=\frac{x(x+1)}{2}+x'=\frac{xx'+2x'}{2}=\frac{x'(x+2)}{2}=\frac{x'((x+1)+1)}{2}=$ $=\frac{x'(x'+1)}{2}$.

Таким образом, мы доказали истинность импликации $P(x)\Rightarrow P(x')$ для всякого x, т. е. $\forall x(P(x)\Rightarrow P(x'))$ — истинное высказывание.

Так как $P(1)$ и $\forall x[P(x)\Rightarrow P(x')]$ — истинные высказывания, то и их конъюнкция

$$P(1)\ \text{и}\ \forall x(P(x)\Rightarrow P(x')) \tag{2}$$

есть истинное высказывание (правило введения конъюнкции (ВК)).

Из (2) и (А5) по ПЗ получаем, что $\forall y\ P(y)$ или $\forall x\ P(x)$ — истинное высказывание.

Мы доказали, что (1) верно для любого натурального x. Очевидно, что такое применение метода математической индукции вполне доступно для учащихся старших классов при наличии у них необходимой логической подготовки.

2.5. Необходимо разъяснить учащимся точный смысл следующих свойств алгебраической структуры $[N, +, \cdot]$:

замкнутости множества N относительно сложения

$$\forall x\forall y\exists z(x+y=z); \tag{1}$$

замкнутости множества N относительно умножения

$$\forall x\forall y\exists z(x\cdot y=z); \tag{2}$$

коммутативности сложения

$$\forall x\forall y(x+y=y+x); \tag{3}$$

коммутативности умножения

$$\forall x\forall y(x\cdot y=y\cdot x); \tag{4}$$

ассоциативности сложения

$$\forall x\forall y\forall z((x+y)+z=x+(y+z)); \tag{5}$$

ассоциативности умножения

$$\forall x \forall y \forall z ((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)); \quad (6)$$

дистрибутивности умножения относительно сложения

$$\forall x \forall y \forall z (x(y + z) = xy + zx); \quad (7)$$

наличия нейтрального элемента множества N относительно умножения

$$\forall x (x \cdot 1 = x). \quad (8)$$

В множестве $N_0 = N \cup \{0\}$ имеется также нейтральный элемент относительно сложения

$$\forall x (x + 0 = x). \quad (9)$$

3. Целые числа

3.1. Порядковая структура $[Z, <]$, как и $[N, <]$, обладает свойством дискретности (в множестве Z также выполняется А2). Но множество Z не имеет начального элемента (не выполняется А1). Здесь имеет место свойство $\forall x \exists y (y < x)$.

3.2. Алгебраическая структура $[Z, +, \cdot]$ обладает всеми свойствами структуры $[N, +, \cdot]$ (2.4, (1)—(9)) и, кроме того, еще следующим свойством:

для каждого $x \in Z$ существует $-x \in Z$, такой, что $x + (-x) = 0$:

$$\forall x \exists (-x) (x + (-x) = 0). \quad (10)$$

Из (10) следует $x = 0 \Leftrightarrow -x = 0$ и $y = -x \Leftrightarrow x = -y$, т. е. $-(-x) = x$. Числа x и $-x$ *симметричны* относительно сложения или *противоположны*.

Из перечисленных свойств следует, что в Z уравнение $a + x = b$ всегда разрешимо, т. е. $\forall a \forall b \exists x (a + x = b)$. Таким числом x является $b + (-a)$.

Действительно,

$$\begin{aligned} a + (b + (-a)) &= a + ((-a) + b) \text{ (по свойству (3))}; \\ &= (a + (-a)) + b \text{ (по свойству (5))}; \\ &= 0 + b \text{ (по свойству (10))}; \\ &= b \text{ (по свойству (9))}. \end{aligned}$$

Структура $[Z, +]$ характеризуется тем, что операция «+» ассоциативна, имеет нейтральный элемент и для каждого элемента существует симметричный элемент. В таком случае говорят, что операция «+» определяет в Z *группо-*

вую структуру или что $[Z, +]$ — *группа*. Так как операция «+» коммутативна, то это коммутативная группа.

Но в множестве Z определена еще одна операция — умножение $(\cdot)$ — ассоциативная и дистрибутивная относительно первой $(+)$. Структура $[Z, +, \cdot]$ называется *кольцом* (кольцо характеризуется тем, что первая операция «+» придает множеству структуру коммутативной группы, а вторая «·» ассоциативна и дистрибутивна относительно первой).

4. Рациональные числа

4.1. Структура $[Q, <]$ уже не обладает свойством дискретности, между любыми двумя рациональными числами имеется рациональное число (а следовательно, и бесконечное множество рациональных чисел).

В множестве Q истинно высказывание

$$\forall x \forall y\,(x < y \Rightarrow \exists z\,(x < z \text{ и } z < y)).$$

Если использовать сокращенную запись «$x<z<y$» конъюнкции ($x<z$ и $z<y$), то

$$\forall x \forall y\,(x < y \Rightarrow \exists z\,(x < z < y)).$$

Это высказывание и выражает свойство *плотности*.

Учащиеся склонны считать множество Q не только всюду плотным, но и полным, т. е. покрывающим прямую без пробелов. Это ошибочное понимание порождается восприятием геометрического изображения чисел в виде точек на прямой. Рациональные точки прямой (точки прямой, соответствующие рациональным числам) расположены настолько плотно, что, кажется, они уже не оставляют на прямой никаких пустых мест, т. е. что они исчерпывают все точки прямой. Опровергнуть это неправильное представление можно доказательством существования на прямой точек, не соответствующих никаким рациональным числам. Для этого можно использовать, как известно, несоизмеримость диагонали квадрата с его стороной.

На отрезке AO, где A — рациональная точка (рис. 56), строим квадрат и диагональ его откладываем на прямой от точки O. Полученная точка A' не является рациональной, ибо диагональ квадрата (OA') несоизмерима с его стороной (OA). Так как рациональных точек A на пря-

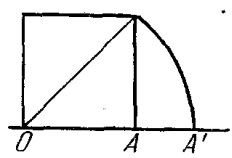


Рис. 56

мой бесконечное множество, то и точек A', которым не соответствуют никакие рациональные числа, также бесконечное множество (здесь, разумеется, не отражается тот факт, что эти множества неравномощны).

4.2. Алгебраическая структура $[Q, +, \cdot]$ обладает всеми свойствами структуры $[Z, +, \cdot]$ (1.4, (1)—(9); 2.1, (10)) и, кроме того, еще следующим свойством:

для каждого $x \in Q$, отличного от 0, существует $x^{-1} \in Q$, такой, что $x \cdot x^{-1} = 1$:

$$\forall x \neq 0 \ \exists x^{-1} (x \cdot x^{-1} = 1). \tag{11}$$

Из (11) следует, что

$$x = 1 \Leftrightarrow x^{-1} = 1;$$

$$y = x^{-1} \Leftrightarrow x = y^{-1}, \text{ т. е. } (x^{-1})^{-1} = x.$$

Числа x и x^{-1} *симметричны* относительно умножения или *взаимообратны.*

В множестве Q уравнение $ax = b$ (при $a \neq 0$) всегда разрешимо, т. е. $\forall a \neq 0 \ \forall b \exists x (ax = b)$. Таким числом x является ba^{-1}. Действительно,

$$\begin{aligned} a(ba^{-1}) &= a(a^{-1}b) \text{ (по свойству (4))}; \\ &= (aa^{-1})b \text{ (по свойству (6))}; \\ &= 1 \cdot b \text{ (по свойству (11))}; \\ &= b \text{ (по свойству (8))}. \end{aligned}$$

4.3. Структура $[Q, +, \cdot]$ является кольцом, в котором вторая операция $(\cdot)$ придает множеству Q новую групповую структуру, если только удалить из Q нейтральный элемент относительно первой операции (т. е. 0), причем эта группа $[Q, \cdot]$ тоже коммутативна. В таком случае говорят, что операции «$+$» и «$\cdot$» придают множеству Q структуру *поля.*

5. Вещественные числа

5.1. По поводу изучения вещественных чисел в школьном курсе высказываются различные, порой противоположные, точки зрения. С одной стороны, существует убеждение, что более или менее корректно изложить теорию действительных чисел в школе невозможно ввиду чрезвычайной трудности такого изложения. С другой стороны, в педагогико-математической литературе встречаются попытки при-

способить какое-нибудь из известных построений теории вещественных чисел (по Вейерштрассу, по Дедекинду или по Кантору) к школьному обучению. Высказываются также противоположные мнения по поводу необходимости сколько-нибудь строгой и развитой теории вещественных чисел в школьном обучении.

Мы не будем здесь разбирать эти различные точки зрения, хотя, несомненно, полезно ознакомиться с различными построениями школьного учения о вещественных числах, отражающими в той или иной мере идеи, лежащие в основе соответствующих научных построений теории вещественных чисел.

5.2. Остановимся здесь лишь на вопросе о выявлении различия между структурами множеств Q и R, если R получено дополнением Q бесконечными десятичными непериодическими дробями, принимаемыми за новые (иррациональные) числа (о чем мы уже говорили в гл. 15).

Рассмотрим следующие шаги.

а) Показываем, что бесконечные десятичные дроби порождают пары сходящихся числовых последовательностей. Например, бесконечная десятичная периодическая дробь 0, (3) определяет две числовые последовательности: последовательность приближенных значений с недостатком $\{a_n\}$ 0,3; 0,33; 0,333; ... и последовательность приближенных значений с избытком $\{a'_n\}$ 0,4; 0,34; 0,334; ... Рациональное число (1/3), определяемое дробью 0, (3), является общим пределом этих двух последовательностей.

Последовательности $\{a_n\}$ и $\{a'_n\}$ приближенных значений с недостатком и с избытком бесконечных десятичных дробей обладают следующими очевидными свойствами:

$$\forall x \forall y \, (x \in \{a_n\} \text{ и } y \in \{a'_n\} \Rightarrow x \leqslant y) \tag{1}$$

(каждый член первой последовательности не больше любого члена второй последовательности);

$$\forall n \forall p \, (a_{n+p} \geqslant a_n \text{ и } a'_{n+p} \leqslant a'_n) \tag{2}$$

(члены первой последовательности не убывают, а члены второй не возрастают);

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in N \ (a'_n - a_n < \varepsilon) \tag{3}$$

(члены последовательностей приближаются сколь угодно близко).

Условия (1)—(3) называются условиями *сходимости*,

а последовательности $\{a_n\}$ и $\{a'_n\}$ — *встречными сходящимися последовательностями.*

б) Пусть $\exists r \in Q\ \forall n \left(a_n \leqslant r \leqslant a'_n\right)$. Тогда r — единственное, т. е.

$$\exists s \in Q\ \forall n \left(a_n \leqslant s \leqslant a'_n\right) \Rightarrow (s = r).$$

Пусть $\exists s \in Q\ \forall n (a_n \leqslant s \leqslant a'_n)$ **и** $(s \neq r)$. Положим для определенности, что $s > r$.

Из $a'_n \geqslant s$ и $a_n \leqslant r$, вычитая второе неравенство из первого, находим $a'_n - a_n \geqslant s - r$, т. е. $\exists \varepsilon > 0\ \forall n \left(a'_n - a_n \geqslant \varepsilon\right)$, где $\varepsilon = s - r$, что противоречит условию (3).

Мы доказали единственность r.

Теперь установим, что $\lim \{a_n\} = r$ и $\lim \{a'_n\} = r$. Докажем, что $\lim \{a_n\} = r$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \forall n\ (n > n_0 \Rightarrow |r - a_n| < \varepsilon).$$

Допустим, что это неверно, т. е. что истинно предложение

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall n_0\ \exists n\ (n > n_0 \text{ и } |r - a_n| \geqslant \varepsilon).$$

Имеем $r - a_n \geqslant \varepsilon$ (*), и в силу (3) можем выбрать n так, чтобы $a'_n - a_n < \varepsilon$ (**).

Вычитая из (*) неравенство (**), получаем $r - a'_n > 0$ или $r > a_n$, что противоречит условию $\forall n \left[a_n \leqslant r \leqslant a'_n\right]$.

в) Возникает вопрос: всегда ли встречные сходящиеся последовательности рациональных чисел, порождаемые бесконечными десятичными дробями, имеют предел в множестве Q? Если это последовательности приближенных значений бесконечной десятичной периодической дроби, выражающей рациональное число, то они имеют своим пределом данное рациональное число. Мы можем сказать в этом случае, что последовательности определяют рациональное число.

Если же встречные сходящиеся последовательности порождаются бесконечной десятичной непериодической дробью (получаемой, например, при извлечении корня квадратного из 2, где 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; ...— последовательность приближенных значений с недостатком, а 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143; ...— то же с избытком), то у них нет предела в множестве Q.

Доказательство отсутствия рационального числа, большего, чем числа первой последовательности, и меньшего,

чем числа второй последовательности (рационального числа, квадрат которого равен 2), общеизвестно.

Итак, в множестве Q имеется «пробел» — отсутствует предел этих сходящихся последовательностей. Этот пробел восполнен в расширенном множестве R, где пределом этих последовательностей является иррациональное число $(\sqrt{2})$. Мы можем сказать в данном случае, что последовательности определяют иррациональное число.

Описанную конструкцию можно, разумеется, осуществить и без явного использования понятия предела. Мы же хотим показать, что множество R в отличие от Q замкнуто относительно операции определения предела любой сходящейся последовательности (хотя бы рациональных чисел).

17. ФУНКЦИЯ. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

1. Содержание

1.1. Функция — одно из фундаментальных понятий школьного курса алгебры и начал анализа, одна из основных линий (функциональная) развития этого курса.

Программа 1981 г. (базисная) определяет основное содержание темы «Элементарные функции» по VI—VIII и IX—X классам. Так, в VI—VIII классах изучаются следующие темы: понятие о числовой функции; способы задания функций (формула, таблица, график); область определения и область значений функции; возрастание и убывание функций; четные и нечетные функции. Кроме этих общих вопросов, предусматривается изучение таких функций: $y = kx$, $y = \frac{k}{x}$, $y = kx + b$; $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = x^n$, $y = \sqrt[n]{x}$ (n — натуральное), $y = ax^2 + bx + c$; их свойства и графики; простейшие преобразования графиков.

В IX, X классах изучаются темы: степенная, показательная и логарифмическая функции, их свойства и графики; натуральные логарифмы; понятие об обратных функциях; тригонометрические функции числового аргумента: синус, косинус, тангенс, котангенс; периодичность функций; свойства и графики тригонометрических функций; обратные тригонометрические функции (арксинус, арккосинус, арктангенс).

1.2. После введения производной предусматривается ее применение к исследованию функций, т. е. изучаются при-

знаки возрастания и убывания функций, применение производных к нахождению экстремумов функций, построение графиков функций и решение задач на максимум и минимум функций с помощью производных.

Программа предусматривает знание таблицы производных и интегралов элементарных функций.

Один приведенный перечень программных вопросов показывает, какой большой удельный вес занимает тема «Функция» в школьном курсе математики. Поэтому особо важен и вопрос о трактовке фундаментального понятия функции.

2. Различные трактовки общего понятия функции

2.1. Термин «функция» применяется в нескольких различных смыслах. В математике известны два основных направления истолкования понятия функции.

Первое направление, исторически более раннее, называемое также *классическим*, ориентировано в основном на традиционные приложения математики в физике и технике и опирается на понятие «переменная величина».

Второе, называемое *современным*, не использует это понятие, охватывает более широкий круг объектов, включаемых в понятие функции, и поэтому способно обслужить как все традиционные приложения математики, так и еще много новых, возникших в последнее время.

В рамках первого, классического, направления в свою очередь можно выделить два подхода, первый из которых, очевидно, скорее соответствует точке зрения физиков, второй — точке зрения математиков.

Первый подход состоит в истолковании функции как переменной величины. Такое толкование традиционно принималось в средней школе: «Та переменная величина, числовые значения которой изменяются в зависимости от числовых значений другой, называется зависимой переменной, или функцией этой другой переменной величины (*Киселев А. П.* Алгебра. М., 1960, ч. 2, с. 25).

Второй подход состоит в истолковании функции как закона (или правила), по которому значения зависимой переменной величины соответствуют значениям независимых переменных величин: «Закон (правило), по которому значениям независимых переменных отвечают (соответствуют) значения рассматриваемой зависимой переменной, называется функцией» (*Мышкис А. Д.* Лекции по высшей математике. М., 1964, с. 37).

Разумеется, приведенные формулировки нельзя считать строгими определениями функции, поскольку в них фигурирует термин «переменная величина», уточнение смысла которого связано с определенными трудностями.

2.2. Второе направление, современное (или теоретико-множественное), связанное с отказом от расплывчатого понятия переменной величины, приводит к значительному расширению понятия функции, поскольку рассматривает функции не только от «величин». В рамках этого направления также можно различить несколько подходов (в основном четыре).

Первый подход определяет не саму функцию, а лишь «функциональную ситуацию», т. е. положение, при котором можно говорить, что имеется функция.

Эта ситуация в наиболее общем виде, приводящем к самому общему понятию функции, определяется примерно так: пусть M и F — два произвольных множества. Говорят, что на M определена функция f, принимающая значения из F, если элементу $x \in M$ поставлен в соответствие один и только один элемент из F. В случае множеств произвольной природы вместо термина «функция» часто пользуются термином «отображение», говоря об отображении множества M в множество F.

Второй подход трактует функцию как правило или закон, по которому для каждого элемента одного множества указывается некоторый элемент другого множества.

В этом определении используется понятие «правило» или «закон». Смысл этих терминов уточняется посредством понятия алгоритма, но это уточнение приводит к сужению класса функций (всякие функции сводятся к вычислимым). Можно, разумеется, считать понятие «закон» первоначальным и поэтому неопределяемым, но это вряд ли целесообразно, так как включение такого понятия в определение функции не является эффективным.

Третий подход трактует функцию как соответствие, и в этой трактовке заключается наиболее законченное представление о функции: «В самом общем смысле функция — это соответствие, в силу которого каждому элементу x некоторого множества X отвечает единственный элемент y некоторого множества Y» (*Клини С. К.* Введение в метаматематику. М., 1957, с. 36).

В этой трактовке исходным является понятие «соответствие», которое легко может быть сделано интуитивно ясным.

Четвертый подход трактует функцию как специаль-

ный вид отношения (функциональное отношение): отношение xFy, где $x \in X$ и $y \in Y$, является функциональным, если порождаемое им множество пар *однозначно справа*, т. е. в нем нет двух различных пар с одинаковыми первыми элементами, иными словами, если выполняется условие

$$\forall x \in X \ \forall y_1, \ y_2 \in Y \ (xFy_1 \text{ и } xFy_2 \Rightarrow y_1 = y_2).$$

По существу последние два подхода к трактовке современного понятия функции (через «соответствие» и через «отношение») представляют собой лишь два способа разъяснения этого понятия и отличаются лишь терминологически (термин «соответствие» может пониматься как синоним «отношения»).

3. Различные подходы к формированию и развитию понятия функции в школьном обучении

3.1. Исторический подход к формированию понятий в школьном преподавании предусматривает повторение в обучении основных этапов, через которые прошли эти понятия в процессе развития науки. В этом подходе имеются, несомненно, положительные стороны, но придерживаться исторической схемы во всех случаях в обучении математике нецелесообразно. Действительно, исторический путь формирования научных понятий далеко не всегда является коротким и логически совершенным. Но если наука была вынуждена идти такими путями в силу ряда исторически обусловленных причин, то в обучении мы можем выбрать более короткий и логически более совершенный путь, который (в большинстве случаев) является и более простым.

Традиционная методика утверждает, что только тот путь, по которому формировалось и развивалось данное понятие в науке, наилучший и в процессе обучения. Исходя из этого принципа, она часто и не достигает современной трактовки понятий, так как ведет учащихся по длинному пути, усыпанному психологически трудными переходами от одной трактовки к другой, построенной на совершенно иных основаниях.

3.2. Естественно возникает вопрос: должно ли школьное обучение дойти до современного понятия функции или же достаточно ограничиться классической трактовкой?

В статье «О некоторых принципах преподавания математики в школе» (Математика в школе, 1982, № 2, с. 50)

академик Л. С. Понтрягин и профессор А. С. Мищенко сопоставляют два определения понятия функции: 1) соответствие между множеством X и множеством Y, при котором каждому элементу множества X соответствует один и только один элемент множества Y, называется функцией; 2) функцией от независимой переменной x называется другая переменная y, числовые значения которой вполне определяются значениями независимой переменной.

Авторы статьи справедливо утверждают, что первое определение предполагает предварительное введение целой серии понятий: соответствие, множество, элемент, пара элементов, множество пар элементов. Из перечисленных понятий, однако, первые три не определяются, и все достаточно ясны интуитивно. Если же попытаться уточнить второе определение, т. е. определить фигурирующие в нем понятия (переменная, независимая переменная, числовые значения переменной), то это окажется не проще, чем в первом случае. Достаточно попытаться сделать это хотя бы для понятия переменной величины, чтобы убедиться в справедливости сказанного, не говоря уже об обороте речи «вполне определяется», требующем разъяснения.

Возникает вопрос, надо ли предварять введение понятия функции формированием адекватных интуитивных представлений, способствующих как переходу к точному понятию, так и применению последнего в различных конкретных ситуациях.

Анализ приведенных определений показывает, что между ними нет непреодолимого барьера. Второе определение ближе к интуитивным представлениям и, что особенно важно, к приложениям. Оно по существу само дает лишь интуитивное понятие о числовой функции, поскольку фигурирующие в нем термины обозначают интуитивные понятия. Первое определение на точном математическом языке раскрывает сущность понятия функции как точного математического понятия, но более удалено от приложений, что составляет серьезный недостаток для обучения.

Целесообразно начинать с формирования интуитивных представлений о функциональных зависимостях (в смысле второго определения), но вряд ли этим следует ограничиться во всем курсе математики средней школы. В дальнейшем, в старших классах, возможен переход от второго определения к первому как к одному из возможных математических уточнений интуитивного понятия, оформленного на основе второго определения.

4. Процесс формирования понятия функции

4.1. В школьном обучении вполне можно обойтись без самого общего понятия функции и ограничиваться лишь понятием числовой функции числового аргумента.

4.2. Процесс формирования понятия функции длительный. В нем можно выделить шесть уровней.

Первый (пропедевтический) уровень соответствует началу работы по формированию представления о функции (в начальных классах). На этом уровне не даются никакие определения. Однако материал начального курса математики содержит много примеров, на которых можно разъяснить зависимость значений одной величины от значений другой. Например, можно показать, как зависит сумма от каждого слагаемого, разность — от уменьшаемого и вычитаемого, произведение — от каждого из сомножителей, используя при этом язык с «пустыми местами» (например, $3+\square$, $7-\bigcirc$, $\square \cdot 2$ и т. д.).

Второй (пропедевтический) уровень отличается от первого тем, что составляются таблицы значений, наглядно представляющие зависимости. Кроме функций, задаваемых таблицей, рассматриваются и функции, задаваемые конечной областью определения и правилом нахождения значений функции. На этом этапе еще можно обойтись без переменных.

На третьем уровне появляется необходимость введения переменных: x (с областью значений X) и y (с областью значений Y), так как правило для нахождения элементов, соответствующих элементам из X, выражается формулой, которая содержит переменные x и y; если в эту формулу подставить вместо x какое-нибудь ее значение из X, то соответствующим ему значением Y будет то, которое обращает эту формулу в истинное высказывание. Иначе говоря, функция определяется множеством пар значений x и y, обращающих формулу в истинное высказывание.

Именно в этом смысле мы говорим, что, например, уравнение $y=2x+3$ «выражает» некоторую функцию. Говорят также, что алгебраическое выражение, т. е. терм «$2x+3$», выражает «функцию переменной x» в том смысле, что для каждого значения x этот терм дает соответствующее значение функции. Однако ни уравнение $y=2x+3$, ни терм «$2x+3$» еще не задают функцию, так как неизвестна область определения, т. е. область значений переменной x. Задание этой функции может быть представлено следующим образом:

$x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $y = 2x + 3$.

Отсюда легко получить табличное задание функции

x	y
1	5
2	7
3	9
4	11
5	13

Обратный переход от таблицы к уравнению $y=2x+3$ более труден. Покажем два методических решения этого перехода.

1. Учащимся IV класса была предложена следующая задача: зависимость переменной y от переменной x задана следующей таблицей:

x	y
1	5
2	7
3	9
4	11
5	13

Указать такое правило, с помощью которого для любого значения x (из множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$) можно определить соответствующее ему значение y.

Прежде всего мы учили детей решать эту задачу перебором различных способов (алгоритмов), с помощью которых можно получить 5 из 1; 7 из 2; 9 из 3; 11 из 4; 13 из 5. Например, 5 можно получить из 1, прибавив к 1 число 4, но если этот же способ применить к 2, получим 6, а не 7. Можно получить 5 из 1, умножив 1 на 5, но этим способом из 2 получим 10, а не 7. Значит, эти два способа отпадают. В каждом из них мы использовали только одно действие — сложение или умножение. Попробуем использовать оба эти действия.

Из 1 можно получить 5, умножив 1 на 3 и прибавив 2 ($1 \cdot 3+2=5$), но если этот же способ применить к 2, получим 8, а не 7. И этот способ отпадает. Но 5 из 1 можно получить, умножив 1 на 2 и прибавив 3 ($1 \cdot 2+3=5$). Применим этот способ к остальным значениям переменной x:

$2 \cdot 2+3=7$; $3 \cdot 2+3=9$; $4 \cdot 2+3=11$; $5 \cdot 2+3=13$.

Данный способ подходит.

Мы нашли правило, с помощью которого из каждого значения переменной x получаем соответствующее ему значение переменной y (или из первого элемента каждой пары получаем ее второй элемент). Это правило состоит в следующем: 1) значение x умножается на 2; 2) к полученному произведению прибавляется 3.

Теперь остается записать найденное правило с помощью формулы. Это достигается обобщением (сохранением в записанных равенствах всего, что у них общего) и абстрагированием (опусканием того, чем они отличаются, т. е. различных значений x и y).

Получаем форму с двумя «пустыми местами»:

$$\square \cdot 2 + 3 = \bigcirc$$

или с двумя переменными

$$2x + 3 = y.$$

2. В описанном решении задачи поиск алгоритма не был связан с какой-то идеей и проводился простым перебором. Мы решили эту задачу и другим способом, направив поиск учащихся по пути, связанному с важной идеей.

Нетрудно заметить, что разности «соседних» значений функции (соответствующих последовательным значениям x) постоянны и равны 2: $7-5=9-7=11-9=13-11=2$. Так как разность последовательных значений x равна 1, то это наводит на мысль, что для получения из значения x соответствующего значения y необходимо первое умножить на 2 (если уменьшаемое и вычитаемое умножить на 2, то и разность увеличится в два раза) и, возможно, прибавить (или отнять) определенное число (если к уменьшаемому и вычитаемому прибавить или отнять одно и то же число, разность не меняется).

Таким образом, $y=2x+c$, а число c легко определяется из условия, что, например, при $x=1$, $y=5$: $5=2\cdot 1+c$, откуда $c=3$. Получаем $y=2x+3$. В качестве проверки можно подставить вместо x любое другое его значение, и получим соответствующее ему значение y.

Этот метод представляет собой, разумеется, в упрощенной форме вычисление интеграла. По заданной постоянной производной $y' = 2$ найден интеграл $y = \int 2dx = 2x + c$ и дальше с учетом «начального условия» $y(1) = 5$ определено значение постоянной интегрирования $y = 2x + 3$. В таком смысле надо понимать утверждение о том, что идеи дифференциального и интегрального исчислений можно отразить

в школьном обучении уже в начальных классах. Такое отражение особенно важно сейчас, когда элементы дифференциального и интегрального исчислений стали предметом изучения в старших классах средней школы.

На четвертом уровне к примерам функций, задаваемых с помощью одного терма на всей области определения, добавляются примеры функций, задаваемых с помощью нескольких термов, каждый из которых дает значения функции на какой-то определенной части области определения. Такие примеры можно построить и на основе некоторых конкретных задач, в частности задач на движение.

Следует отметить, что в описываемом процессе формирования понятия функции термы и формулы появляются лишь как одна из форм представления функций, причем не с самого начала этого процесса, а лишь после того, как учащиеся знакомятся с другими способами задания функций и с такими примерами функций, задание которых алгебраическими выражениями невозможно. Такая последовательность изучения способов задания функции не способствует отождествлению функции с алгебраическим выражением. Это, однако, не освобождает учителя от необходимости подчеркивать в процессе обучения различие между этими понятиями.

Переход от четвертого уровня к пятому, т. е. к рассмотрению функций, определенных на бесконечных множествах, уже не представляет особых трудностей.

Для выявления различий необходимо использовать сравнение функций, выражаемых с помощью одной и той же формулы, но определенных на конечном и бесконечном множествах, например:

$$f_1\colon\ y = 2x + 3,\ x \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\};$$
$$f_2\colon\ y = 2x + 3,\ x \in D.$$

Эта запись наглядно подчеркивает различие двух функций: f_1 определена на конечном множестве, f_2 — на бесконечном; f_1 может быть задана с помощью конечной таблицы, f_2 не может быть задана таким способом.

График функции f_1 — конечное множество точек, график функции f_2 — бесконечное множество точек, принадлежащих одной и той же прямой ($\Gamma_{f_1} \subset \Gamma_{f_2}$).

И на этом уровне нужны примеры функций, которые нельзя выразить на языке элементарной алгебры. Таким примером может быть функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in Q, \\ 0, & \text{если } x \in R \setminus Q. \end{cases}$$

Торопиться с усвоением учащимися точного определения не надо. Задача формального определения — подвести итог, закрепить то, что уже понято интуитивно в результате неформальных, содержательных разъяснений на разнообразных конкретных примерах.

Иногда правило нахождения значений функции по заданным значениям аргумента неизвестно. Нередко удается эмпирическим путем найти для отдельных значений аргумента соответствующие им значения функции. Рассматривая функцию на конечном множестве, находят для нее приближение в виде линейной, квадратичной или другой какой-нибудь функции, выражающейся с помощью известной формулы, и пользуются этим приближением на всей бесконечной области определения.

Целесообразно решать с учащимися задачи (шестой уровень) на нахождение приближения функции по заданному конечному множеству принадлежащих ей точек. Например, дана задача: в 8 часов утра температура воздуха была 12°, в 12 часов дня 20°; найти температуру воздуха в 11 часов (приближенно), если известно, что резких скачков температуры в этот день не было. При решении заменяют дугу неизвестной гладкой кривой, проходящей через точки (8, 12) и (12, 20), отрезком прямой, проходящей через эти точки, т. е. в качестве приближения принимают линейную функцию, которой принадлежат данные две точки (линейная интерполяция).

18. ФУНКЦИЯ. МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ

1. Исследование функций элементарными средствами

1.1. Под *исследованием* функции понимают ее изучение, состоящее в выяснении: а) области определения; б) области значений; в) характера изменения (поведения) функции.

«Поведение» функции — сложное понятие, и оно может исследоваться более или менее глубоко, с выяснением большего или меньшего числа свойств в зависимости от уровня, на котором проводится исследование, и используемых средств. Так, в исследование поведения функции вообще может входить выяснение таких свойств, как возрастание, убывание, наличие максимума или минимума, четность, нечетность, периодичность, непрерывность.

Под исследованием функции *элементарными средствами* имеется в виду изучение функции средствами ТЭМ, т. е. без использования понятий предела и производной.

1.2. В связи с введением производной в школьное обучение несколько уменьшается удельный вес исследования функций элементарными средствами. Совершенно очевидна нецелесообразность такого исследования при наличии более мощного аппарата, позволяющего изучать широкий класс функций и упрощающего исследование в тех случаях, когда оно возможно и элементарными средствами.

Однако исследование элементарными средствами остается, естественно, для тех функций, изучение которых предусмотрено программой до введения производной.

Представляется, однако, целесообразным повторное исследование квадратичной функции в общем виде ($y=ax^2+bx+c$), показательной и логарифмической функций с применением производной, чтобы, в частности, показать, как более мощный аппарат упрощает исследование.

1.3. В связи с введением производной элементарное исследование функций, предшествующее этому введению, должно сыграть и новую роль: оно должно служить пропедевтикой для изучения производной и ее применения к исследованию функций. Например, понятия «приращение аргумента» и соответствующее ему «приращение функции» могут быть введены уже в неполной средней школе в связи с определением возрастающей и убывающей функций.

Легко осуществляется переход от одного определения возрастающей функции

$$\forall x,\ x_1\,(x-x_1>0\Rightarrow y-y_1>0)$$

к другому, эквивалентному ему:

$$\forall x\,(\Delta x>0\Rightarrow\Delta y>0)\quad \textbf{или}\quad \forall x\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}>0\right),$$

где Δx обозначает разность $x-x_1$, характеризующую изменение аргумента от значения x_1 к значению x и называемую *приращением* аргумента, а Δy обозначает соответствующее приращение функции.

2. Изучение функции $y=ax+b$; $x\in R$

2.1. Дадим краткое описание методики изучения линейной функции. Физика дает нам многочисленные примеры, мотивирующие необходимость изучения функции, выражае-

мой уравнением $y=ax+b$ и определенной на множестве R вещественных чисел (см. гл. 9).

Подготовку к изучению линейной функции естественно начинать раньше введения этого понятия в явном виде. Пример перехода от табличного задания функции, определенной на конечном множестве, к формуле $y=ax+b$, рассмотренный в IV классе, описан в гл. 17.

Изучение линейной функции естественно начать с рассмотрения частных случаев (например, $y=x$; $y=-x$; $y=2x$; $y=-2x$; $y=\frac{1}{2}x$; $y=-\frac{1}{2}x$), ведущих к ряду обобщений. Графики данных функций строятся по точкам. Находят несколько точек графика и обнаруживают, что они лежат на одной прямой, затем принимают гипотезу, что все точки этого графика расположены на одной прямой. Эта гипотеза получена в результате индуктивного рассуждения: свойство коллинеарности, замеченное у нескольких точек графика, распространяется на все точки графика.

2.2. В дальнейшем доказывается, что график функции, выраженной уравнением $y=ax$, т. е.

$$\Gamma_f = \{(x,\ y) | (x,\ y) \in R^2 \text{ и } y = ax\},$$

есть прямая OA, где $O(0, 0)$ и $A(1, a)$.

Так как Γ_f и OA — множества, то здесь имеем конкретный пример доказательства равенства двух множеств. Поэтому рассмотрим его для иллюстрации общей методики доказательства равенства двух множеств.

Для доказательства равенства $OA=\Gamma_f$ достаточно установить, что каждое из этих множеств включается в другое, т. е.

$$OA \subseteq \Gamma_f \text{ и } \Gamma_f \subseteq OA.$$

Иначе говоря, надо доказать, что

$$\forall (x,\ y)\ ((x,\ y) \in OA \Rightarrow (x,\ y) \in \Gamma_f) \tag{1}$$

и

$$\forall (x,\ y)\ ((x,\ y) \in \Gamma_f \Rightarrow (x,\ y) \in OA), \tag{2}$$

или эквивалентное (по закону контрапозиции) предложение

$$\forall (x,\ y)\ \overline{((x,\ y) \in OA} \Rightarrow \overline{(x,\ y) \in \Gamma_f}). \tag{2'}$$

Докажем (1). Пусть $P(x, y)$ — произвольная точка прямой OA, т. е. $(x, y) \in OA$ (рис. 57, *а*). Из подобия треугольников OAA_1 и OPP_1 получаем $\frac{PP_1}{OP_1} = \frac{AA_1}{OA_1}$ или $\frac{y}{x} = \frac{a}{1}$, от-

куда $y = ax$. Следовательно, $(x, y) \in OA \Rightarrow y = ax$, и так как, кроме того, $(x, y) \in R^2$, находим $(x, y) \in R^2$, и $y = ax$, т. е. $(x, y) \in \Gamma_f$.

Теперь докажем (2′). Пусть теперь $Q(x_1, y_1)$— произвольная точка, не лежащая на прямой OA (рис. 57, *б*) т. е. $\overline{x_1, y_1} \in OA$.

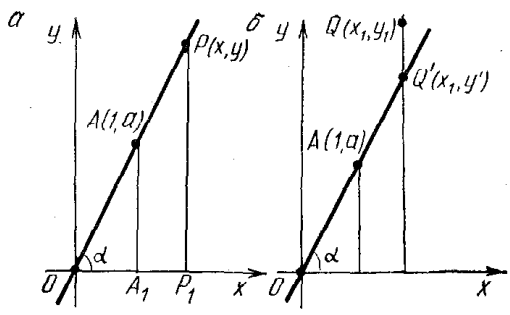


Рис. 57

Проведем из точки Q перпендикуляр к оси Ox. Этот перпендикуляр пересечет прямую OA в некоторой точке Q' (иначе, для x_1 не существовало бы значения функции, что противоречит условию — функция определена на множестве R всех вещественных чисел).

Пусть $Q'(x_1, y')$. Тогда по доказанному (1) $y' = ax$ Но $y_1 \neq y'$, следовательно, $y_1 \neq ax_1$. Итак, $(x_1, y_1) \in R^2 \wedge y_1 \neq ax_1$, т. е. $\overline{(x_1, y_1)} \in \Gamma_f$. Этим доказательство завершено.

2.3. Индуктивное рассуждение, основанное на частных случаях (см. 2.1), приводит еще к одной гипотезе: коэффициент a определенным образом связан с углом наклона прямой OA к положительному направлению оси Ox. Если $a > 0$, этот угол острый и прямая проходит в первом и третьем координатных углах; если $a < 0$, этот угол тупой и прямая проходит во втором и четвертом координатных углах. С увеличением абсолютной величины a угол увеличивается.

Эти наблюдения помогают получить зависимость: $a = \operatorname{tg} \alpha$, легко усматриваемую в треугольнике OAA_1 (см. рис. 57, *а*).

Мы выяснили геометрический смысл коэффициента a. Важно указать и его «механический» смысл. Возьмем какое-нибудь значение x_0 аргумента и увеличим его на 1, т. е. перейдем к новому значению аргумента $x = x_0 + 1$ (в этом случае говорят, что мы дали аргументу x *приращение*, равное 1).

Каждому из значений аргумента соответствует определенное значение функции:

$$x_0 \to y_0 = ax_0;$$

$$x \to y = ax = a(x_0 + 1),$$

и можно легко найти, насколько изменилось значение функции (соответствующее *приращение функции*):

$$y - y_0 = a.$$

Таким образом, коэффициент a равен приращению функции, когда приращение аргумента равно 1.

Рассмотрим механическую модель уравнения $y = ax$, в которой если y — путь, а x — время, то a — скорость, т. е. изменение пути за единицу времени. Используя эту терминологию, можно выявленный смысл коэффициента a описать следующим образом: a — скорость изменения функции, т. е. то изменение, которое получает значение функции, когда значение аргумента изменяется на 1.

2.4. Переход от функции

$$y = ax, \ x \in R, \tag{1}$$

к функции

$$y = ax + b, \ x \in R, \tag{2}$$

целесообразно осуществить через ряд частных случаев.

Фиксируя значение коэффициента a, рассматриваем функции, выражаемые уравнениями: $y = 2x$; $y = 2x + 1$; $y = 2x - 1$; $y = 2x + 3$; $y = 2x - 3$ и т. д.

Индуктивное рассуждение приводит к гипотезе: график функции (2) представляет собой прямую, параллельную графику функции (1) и отсекающую от оси Oy отрезок длины $|b|$, т. е.

$$\Gamma_2 \parallel \Gamma_1 \text{ и } \Gamma_2 \cap Oy = (0, \ b).$$

Эта гипотеза легко доказывается:

$$\forall (x, \ y) \left((x, \ y) \in \Gamma_1 \Rightarrow (x, \ y + b) \in \Gamma_2\right),$$

а поэтому график функции (2) можно получить из графика функции (1) параллельным переносом на вектор $\vec{b}$:

$$\Gamma_2 = P_{\vec{b}}(\Gamma_1),$$

причем $\vec{b}$ сонаправлен вектору $\overrightarrow{Oy}\left(\vec{b} \uparrow\uparrow \overrightarrow{Ox}\right)$, если $b > 0$, и противонаправлен ему $\left(\vec{b} \uparrow\downarrow \overrightarrow{Oy}\right)$, если $b < 0$, и $\left|\vec{b}\right| = |b|$.

Так как Γ_1 — прямая, а параллельный перенос переводит прямую в параллельную ей прямую, то $\Gamma_2 \parallel \Gamma_1$, и так как $(0, \ b) \in \Gamma_2$, то Γ_2 отсекает от оси Oy отрезок длины $|b|$.

Из того, что $\Gamma_2 \parallel \Gamma_1$, следует, что коэффициент a в уравнении $y = ax + b$ имеет тот же геометрический смысл, что и в уравнении $y = ax$, т. е. a равен тангенсу угла наклона прямой $y = ax + b$ к положительному направлению оси Ox.

Легко убедиться в том, что и механический смысл коэффициента a тот же: a — скорость изменения функции, т. е. изменение, которое получает значение функции, когда значение аргумента изменяется на 1.

2.5. Приходим к выводу, что график любой линейной функции $y = ax + b$, $x \in R$, т. е.

$$\{(x, y) | (x, y) \in R^2 \text{ и } y = ax + b\},$$

есть прямая линия. Поэтому построение графика линейной функции сводится к нахождению каких-нибудь двух его точек.

Часто берут точки $(0, b)$ и $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ пересечения графика с осями координат.

2.6. Из рассмотрения частных случаев приходят также к следующему обобщению: если $a>0$, то прямая $y=ax+b$ расположена так, что движущаяся по ней слева направо точка поднимается вверх, т. е. функция возрастающая; если же $a<0$, то эта движущаяся слева направо точка опускается вниз, т. е. функция убывающая.

Эта гипотеза легко доказывается. Будем исходить из приведенного (см. 1.3) определения возрастающей (и аналогичного определения убывающей) функции.

От значения x_0 аргумента и соответствующего значения $y_0=ax_0+b$ функции перейдем к новому значению x аргумента и соответствующему значению $y=ax+b$ функции.

Обозначим приращение аргумента $x - x_0$ через Δx, а соответствующее приращение функции $y - y_0$ — через Δy. Найдем Δy: $\Delta y = ax + b - (ax_0 + b) = a(x - x_0) = a\Delta x$. Отсюда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$. Следовательно, $\forall x\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} = a\right)$.

Поэтому если $a>0$, то функция возрастающая; если $a<0$, то функция убывающая. Если же $a=0$, то функция не возрастает и не убывает. Ее график в этом случае — прямая $y=b$, параллельная оси Ox.

2.7. Мы получили (см. 2.6), что $\Delta y=a\Delta x$, т. е. приращение линейной функции, выраженной уравнением $y=ax+b$, пропорционально приращению аргумента (коэффициент пропорциональности равен a).

Естественно, возникает вопрос: является ли данное свойство характеристическим для линейной функции или же существуют и другие функции, обладающие этим свойством. Ответ на этот вопрос дает следующее предложение: если

приращения функции f пропорциональны приращениям аргумента, то f — линейная функция.

Доказательство совершенно элементарное.

Пусть $\forall x(\Delta y = a\Delta x)$, а при $x = 0$ функция принимает некоторое значение b. Перейдем от $x = 0$ к произвольному значению x аргумента, и пусть соответствующее ему значение функции $f(x) = y$. Тогда $\Delta x = x - 0 = x$ и $\Delta y = y - b$. Следовательно, $y - b = ax$, откуда $y = ax + b$.

Мы наметили выше (см. 2.1—2.7) одну из возможных общих методических схем изучения линейной функции. Разумеется, для применения в преподавании эта схема нуждается в более детальной дидактической обработке и подборе конкретного материала.

3. Изучение функции $y = ax^2$, $x \in \mathbf{R}$

3.1. Наметим схему элементарного исследования функции, определенной на множестве R всех вещественных чисел и выраженной уравнением $y = ax$.

Будем пользоваться выражениями: «функция $y = ax^2$» в смысле «функция, выражаемая уравнением $y = ax^2$, где x — переменная для значений аргумента, а y — переменная для значений функции», и «парабола $y = ax^2$» в смысле «парабола, представляющая собой график функции $y = ax^2$».

Рассмотрим функцию $y = x^2$. Приведем схему ее исследования (табл. 18.1).

Такое сопоставление выражений свойств функции на различных языках (словесном, аналитическом, графическом) целесообразно при исследовании отдельных функций для обучения переводу с одного языка на другой.

После детального изучения функции $y = x^2$ можно предложить учащимся самостоятельно исследовать функцию $y = -x^2$, используя сопоставление с первой функцией.

3.2. Дальше рассматриваются функции: $y = 2x^2$, $y = 3x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = -\frac{1}{3}x^2$. Индукцией приходят к заключению, что график функции $y = ax^2$ $(a > 0)$ можно получить из графика функции $y = x^2$ смещением в вертикальном направлении всех точек параболы $y = x^2$ так, чтобы их расстояния от оси Ox увеличились в a раз (если $a > 1$) или уменьшились в a раз (если $a < 1$). В первом случае преобразование параболы $y = x^2$ называется *растяжением* от оси абсцисс, во втором — *сжатием* к оси абсцисс. При таком растяжении (или сжатии) графика любой функции свойства этой функции (знак, промежутки возрастания и убывания и др.) не изме-

Таблица 18.1

Функция $f: x \to y = x^2,\ x \in R$	График $\Gamma_f = \{(x, y) / (x, y) \in R^2 \text{ и } y = x^2\}$ — кривая, называемая *параболой* (строится по точкам) (рис. 58)
1. Область определения R	1. Перпендикуляр, проведенный к оси абсцисс в любой ее точке, пересекает параболу $y = x^2$ точно в одной точке
2. Область значений $\forall x\,(y \geqslant 0)$ и $\forall y \geqslant 0\ \exists x\,(y = x^2)$; $y = 0$ при $x = 0$; 0 — наименьшее значение функции	2. Парабола $y = x^2$ полностью расположена выше оси абсцисс (в верхней полуплоскости) и имеет с ней единственную общую точку (0, 0). Эта, наиболее низкая точка графика,— *вершина* параболы. Перпендикуляр к оси Oy в любой точке $(0, y)$, где $y \geqslant 0$, пересекает параболу
3. $\forall x\ ((-x)^2 = x^2)$ — функция четная	3. Парабола $y = x^2$ симметрична относительно оси Oy
4. Характер изменения значений функции:	4. В левой полуплоскости парабола опускается сверху вниз, в правой — поднимается снизу вверх

x	$-\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty$
y	$+\infty \searrow 0 \nearrow +\infty$

няются. Поэтому функция $y = ax^2$ $(a > 0)$ обладает теми же свойствами, что и функция $y = x^2$.

Таким путем обнаруживают влияние значения коэффициента на «крутизну» параболы: большему значению a соответствует более «крутая» парабола, меньшему — более «пологая».

После детального изучения функции $y = ax^2$ $(a > 0)$ можно предложить учащимся самостоятельно исследовать функцию $y = ax^2$ $(a < 0)$, используя сопоставление с уже изученной.

3.3. На рис. 59 приведено наглядное представление исследования квадратичной функции в самом общем виде с использованием производной.

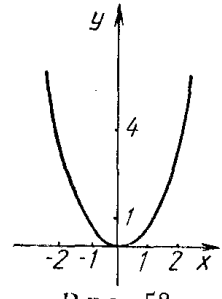


Рис. 58

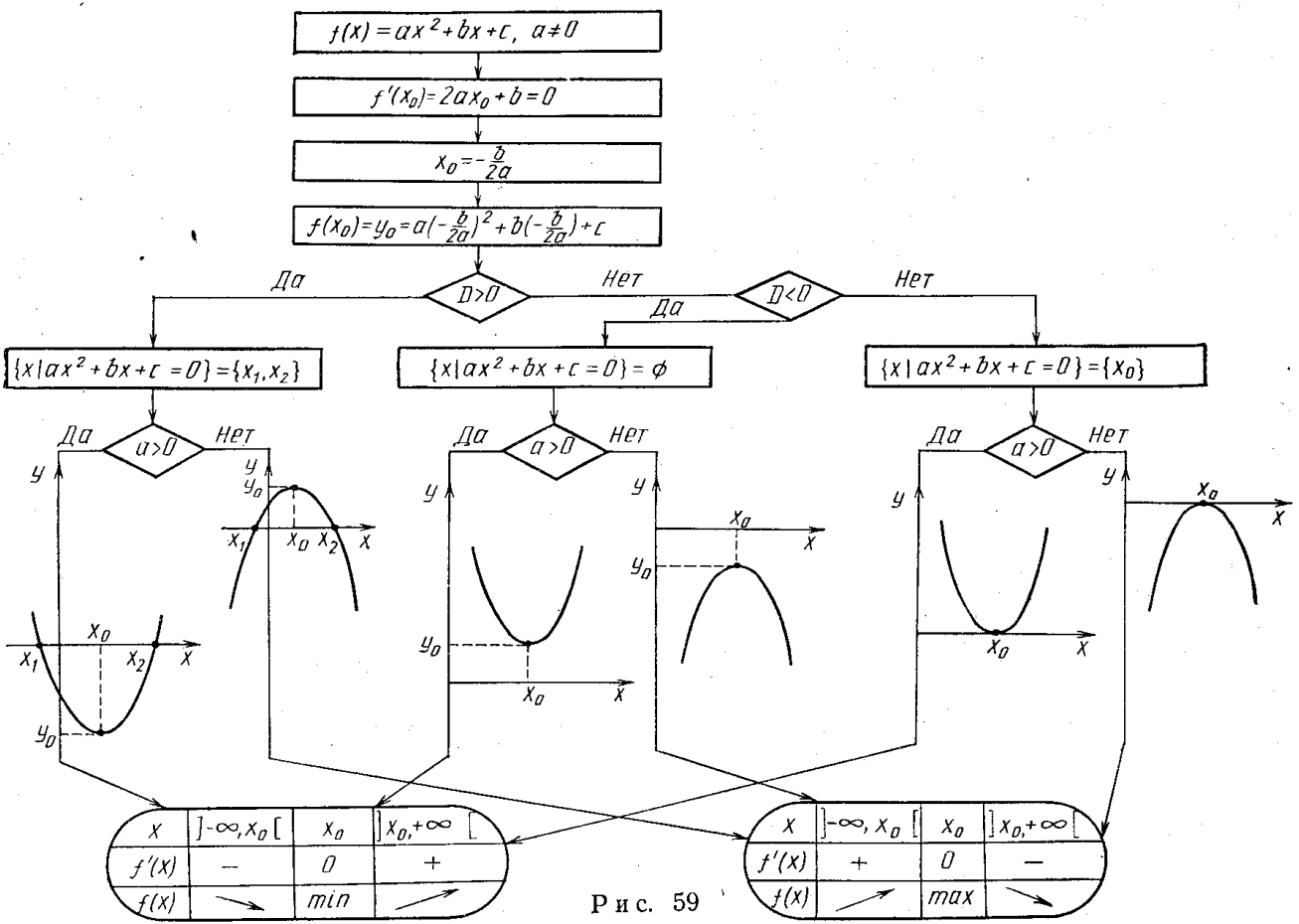

$f(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$
$f'(x_0)=2ax_0+b=0$
$x_0=-\frac{b}{2a}$
$f(x_0)=y_0=a(-\frac{b}{2a})^2+b(-\frac{b}{2a})+c$
Да
$D>0$
Нет
$D<0$
Да
Нет
$\{x\mid ax^2+bx+c=0\}=\{x_1,x_2\}$
$\{x\mid ax^2+bx+c=0\}=\phi$
$\{x\mid ax^2+bx+c=0\}=\{x_0\}$
Да
$a>0$
Нет
y
x
x_1
x_2
x_0
y_0
X | $]-\infty,x_0[$ | x_0 | $]x_0,+\infty[$
$f'(x)$ | − | 0 | +
$f(x)$ | ↘ | min | ↗
X | $]-\infty,x_0[$ | x_0 | $]x_0,+\infty[$
$f'(x)$ | + | 0 | −
$f(x)$ | ↗ | max | ↘

Рис. 59

4. Методика построения графиков

4.1. Графиком функции f мы назвали множество

$$\Gamma_f = \{(x, y) | (x, y) \in X \times Y \text{ и } y = f(x)\}.$$

Для числовой функции числового аргумента, т. е. когда $X, Y \subseteq R$ и $X \times Y \subseteq R^2$, каждой паре (x, y) соответствует точка плоскости (с введенной декартовой системой координат), а Γ_f — множество точек плоскости.

Для обычно изучаемых в школьном курсе функций эти множества точек представляют собой какие-то линии, и когда говорят «построить график функции», имеют в виду построить эту линию, именуемую иногда «линией графика» или просто «графиком» функции.

Разумеется, если X — конечное подмножество R, то и график Γ_f — конечное множество точек плоскости и, хотя бы принципиально, его можно точно построить. Именно с таких случаев (конечных графиков) и следует начинать решение задачи построения графиков.

Однако в большинстве случаев области определения, а следовательно, и графики функций,— бесконечные множества точек плоскости. В таких случаях, когда говорят «построить график», имеют в виду лишь наметить, как расположено на плоскости это множество точек, нарисовать «эскиз» графика, используя при этом конечное число его точек и некоторые свойства функции, подсказывающие расположение графика в остальной части области определения.

4.2. Задачи «исследование функции» и «построение графика функции», разумеется, различны, но тесно связаны между собой. Для построения графика функции, как правило, необходимо исследовать функцию, выявить некоторые ее свойства, определяющие соответствующие свойства графика. Кроме того, свойства графика служат наглядным изображением свойств функции, и поэтому по графику легко исследовать функцию. График подводит к открытию свойств функций, которые подлежат, разумеется, доказательству.

Обычно задача исследования функции включает в себя задачу построения графика. Если же ставится только задача построения графика, то в ходе решения этой задачи функция исследуется лишь в той мере, в какой это необходимо для построения ее графика.

4.3. Если требуется построить график ранее не известной функции, естественно начинать с нахождения нескольких точек графика (как для линейной и квадратной функ-

ций (см. 2.3)). Для этого берут несколько значений аргумента из области определения функции, находят соответствующие им значения функции и отмечают определяемые парами (x, y) точки плоскости.

Если найдено достаточно много точек, к тому же удачно выбранных, то они иногда подсказывают вид и расположение всего графика. Однако нельзя заранее для любых функций сказать, сколько надо взять точек и где их целесообразно взять. Эти вопросы решаются конкретно для каждой функции.

В школьной практике такое построение графика обычно называют построением «по точкам».

Часто, однако, такое построение «по точкам», без всяких элементов исследования, недостаточно. Так, например, некоторые выпускники средней школы на вступительных экзаменах в вуз пытаются построить график квадратичной функции, определяемой уравнением $y=x^2-6x+5$, выбирая несколько значений аргумента, симметричных относительно 0. Они составляют примерно такую таблицу:

x	-2	-1	0	1	2
y	21	12	5	0	-3

и получают дугу графика, не подсказывающую его поведения в других точках области определения функции.

Совершенно очевидно, что построение «по точкам» должно сочетаться с исследованием функции. Это исследование обычно включает: определение точек пересечения графика с осями координат, промежутков монотонности функции, положительных и отрицательных значений функции (расположения графика в верхней или нижней полуплоскости), точек, где функция принимает наибольшее или наименьшее значение, поведения функции при $x \longrightarrow -\infty$ и при $x \longrightarrow +\infty$ и т. п.

Вообще, всякое построение графика, состоящее из нахождения конечного числа его точек и соединения их «плавной линией», не будет строгим. Результатом такой процедуры является лишь эскиз графика, правильно отражающий поведение графика лишь в том случае, если сделанная гипотеза о поведении графика в ненайденных его точках верна.

4.4. Представляется весьма целесообразным составление «словаря» для перевода свойств функции на язык графика. Две строки такого словаря (возрастание и убывание функции) приведены в качестве примера (гл. 4, 4.1) при

рассмотрении принципа наглядности. Такой словарь составлен и в связи с исследованием функции $y=ax^2$.

4.5. Часто графики одних функций можно получить путем определенных преобразований уже известных графиков других функций.

Приведем несколько примеров.

Пример 1. Пусть Γ_f известен. Надо построить Γ_{f_1}, где $f_1(x)=|f(x)|$. Так как

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x), & \text{если } f(x)\geqslant 0,\\ -f(x), & \text{если } f(x)<0,\end{cases}$$

то Γ_{f_1} получается следующим образом: часть Γ_f, находящаяся в верхней полуплоскости, остается, а часть Γ_f, находящаяся в нижней полуплоскости, заменяется своим зеркальным отражением относительно оси абсцисс.

Пример 2. Пусть $f_2(x)=f(|x|)$.

Так как $f_2(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=f_2(x)$, то f_2 — четная функция, и Γ_{f_2} получается следующим образом: часть Γ_f, лежащая правее оси ординат, остается, а левая часть графика $\Gamma_{f_{2f_2}}$ представляет собой отражение правой части относительно оси ординат.

Пример 3. Пусть $g(x)=f(x+a)$.

Обозначим графики функций f и g через F и G соответственно. Пусть $(x,\ y)\in F$. Это означает, что $y=f(x)$. Кроме того, $f(x)=g(x-a)=y$, т. е. $(x-a,\ y)\in G$.

Если $a>0$, то точка $(x-a,\ y)$ лежит левее, а если $a<0$ — правее точки $(x,\ y)$ на расстоянии $|a|$. Отсюда правило: для построения графика G, где $g(x)=f(x+a)$, достаточно подвергнуть график F горизонтальному переносу на вектор $\vec{a}$, причем $\vec{a}\uparrow\downarrow\overrightarrow{Ox}$ (если $a>0$) и $\vec{a}\uparrow\uparrow\overrightarrow{Ox}$ (если $a<0$), т. е. $G=P_{\vec{a}}(F)$ и $\vec{a}\parallel\overrightarrow{Ox}$.

Аналогично получается правило вертикального переноса: для построения графика функции $h(x)=f(x)+a$ необходимо подвергнуть график F вертикальному переносу на вектор $\vec{a}$, причем $\vec{a}\uparrow\uparrow\overrightarrow{Oy}$, если $a>0$, и $\vec{a}\uparrow\downarrow\overrightarrow{Oy}$, если $a<0$, т. е. $H=P_{\vec{a}}(F)$ и $\vec{a}\parallel\overrightarrow{Oy}$.

Так, если

$$F=\{(x,\ y)|(x,\ y)\in R^2 \text{ и } y=ax^2\},$$

$$G=\{(x,\ y)|(x,\ y)\in R^2 \text{ и } y=a(x+m)^2+n\},$$

то $G = P_{\vec{m}} \cdot P_{\vec{n}}(F)$ (или $P_{\vec{n}} \cdot P_{\vec{m}}(F)$), где $\vec{n} \parallel \overrightarrow{Oy}$ и $\vec{m} \parallel \overrightarrow{Ox}$.

Правило горизонтального переноса используется и для построения графиков периодических функций.

19. ОПЕРАЦИЯ

1. Содержание

1.1. Не имеет смысла изучать только числа без рассмотрения действий над ними и свойств этих действий. Широкое применение числа получают благодаря тому, что в каждом числовом множестве введены операции над числами, порождающие в этом множестве определенную алгебраическую структуру.

1.2. Действия над числами широко представлены в программе 1981 г. (базисной). При каждом очередном расширении понятия числа изучаются действия над числами расширенного множества и показываются свойства этих действий.

Так, в IV — V классах программа 1981 г. включает следующие вопросы: арифметические действия над натуральными числами, свойства арифметических действий; арифметические действия над обыкновенными дробями; арифметические действия над десятичными дробями; правила выполнения арифметических действий над положительными и отрицательными числами; арифметические действия над рациональными числами, свойства действий. В VI—VIII классах — нахождение приближенного значения квадратного корня, выполнение арифметических действий над приближенными значениями величин. В IX—X классах — арифметические действия над комплексными числами, умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме.

Программа 1981 г. включает и изучение операций над нечисловыми объектами, векторами (сложение векторов и их свойства, умножение вектора на число и его свойства, скалярное умножение векторов и их свойства) на плоскости и в пространстве.

1.3. В школьной практике не применяется и термин «операция». Очевидно, что через некоторое время после введения термина «действие» (арифметическое действие) целесообразно ввести и термин «операция» как синоним термина «действие», а в старших классах полностью перейти к применению термина «операция».

Установившаяся методика преподавания не уделяет, однако, достаточного внимания разъяснению свойств операций. Например, учащиеся не понимают значения отдельных свойств операций, в частности значения свойства ассоциативности, хотя знают формулировки этих свойств. Они не понимают, почему $x(y+z)=xy+xz$ выражает дистрибутивность (распределительность) именно умножения относительно сложения. Задача: «доказать, что сложение недистрибутивно относительно умножения», сводящаяся к опровержению тождества $x+yz=(x+y)(x+z)$, недоступна учащимся, в том числе и выпускникам школы, так как они не понимают, что от них требуют.

1.4. Общее понятие операции и систематизация числовых множеств с точки зрения их алгебраической структуры не являются предметом обязательного изучения всеми учащимися. По-видимому, не может быть сомнения в том, что этот вопрос должен изучаться на факультативных занятиях.

2. Различные трактовки

2.1. Наиболее известны две трактовки общего понятия операции. В одной из них операция трактуется как «закон композиции», в другой — как функция.

Под законом композиции понимают закон или правило составления из двух элементов множества нового элемента этого же множества.

Если в множестве $M=\{a, b, c, \ldots\}$ введена некоторая операция $(*)$, это означает, что для любых двух элементов (a, b) данного множества операция $(*)$ выполнима, т. е. существует, и притом единственный, элемент $c\in M$, являющийся результатом применения этой операции (закона композиции) к элементам a и b, что обозначается обычно так: $a*b=c$.

Применяемый здесь знак $=$ надо понимать как знак совпадения элемента $a*b$ с элементом c данного множества. Так именно надо понимать запись $3+1=4$ — «результат сложения чисел 3 и 1 совпадает с числом 4».

Понимание операции как закона композиции, хотя само понятие «закон», как мы уже отметили раньше (см. гл. 15), остается неуточненным, является весьма широким. Иногда и понятие функции рассматривается как операция: символ f называют оператором, а $f(x)$ обозначает результат применения оператора f к значению аргумента x. Так, если $f(x)=3x^2+1$, то f — оператор, определяющий следующую (сложную) операцию: «возвести значение аргумента x в

квадрат; полученное число умножить на 3; полученное число сложить с числом 1».

Возможна, однако, другая точка зрения, согласно которой операция рассматривается как функция.

2.2. По существу закон композиции ставит в соответствие каждой паре элементов из M точно один элемент этого же множества, т. е. осуществляется отображение множества M^2 всевозможных пар элементов из M в множество $M\,(M^2 \longrightarrow M)$.

Мы приходим к следующему определению: *операцией* (точнее бинарной операцией) $*$ в множестве M называется отображение множества M^2 в множество $M\,(M^2 \to M)$, ставящее в соответствие каждому элементу $(x, y) \in M^2$, т. е. каждой паре элементов из M, один определенный элемент $x * y \in M$. Иными словами, это означает

$$\forall x \forall y \exists z\,(x * y = z); \tag{1}$$

$$\forall x \forall y \forall z \forall t\,(x * y = z \text{ и } x * y = t \Rightarrow z = t) \tag{2}$$

(высказывание (1) выражает существование результата операции над любыми двумя элементами данного множества, а условие (2) — единственность).

Операция, удовлетворяющая приведенному определению, называется также *внутренней* операцией множества M. Однако имеются операции, не подходящие под это определение. Примером может служить скалярное умножение векторов, так как с каждой парой векторов оно сопоставляет не вектор, а вещественное число — их скалярное произведение.

Эта операция представляет собой отображение типа $V^2 \longrightarrow R$ (V — множество векторов). В этом случае уже не имеет смысла говорить о «замкнутости» множества относительно операции. Здесь фигурируют два множества: результат операции над двумя элементами из V является объектом другой природы, элементом другого множества (R).

Аналогично и умножение вектора на вещественное число не является внутренней операцией, а представляет собой отображение

$$R \times V \to V,$$

т. е. каждой паре $(x, \vec{a}) \in R \times V$ соответствует точно один элемент $\overrightarrow{ax} \in V$.

Таким образом, наиболее общее понятие бинарной операции можно определить как отображение типа

$$A \times B \to C,$$

т. е. как соответствие, сопоставляющее с каждой парой элементов $(a, b) \in A \times B$ точно один элемент $c \in C$.

Когда $A = B = C$, получаем как частный случай понятие внутренней операции.

3. Формирование общего понятия операции

3.1. Естественно, может возникнуть вопрос: следует ли стремиться в школьном обучении к обобщениям в области изучения операций? Необходимо ли формирование общего понятия операции? Ответ на этот вопрос зависит, разумеется, от целей обучения. Он положителен, если цель — достичь понимания учащимися значения общности и абстрактности математического формализма, возможности его различных содержательных интерпретаций, а следовательно, и его применения в различных конкретных ситуациях.

3.2. Из двух рассмотренных трактовок понятия операции для школьного обучения, очевидно, больше подходит вторая. Во-первых, нецелесообразно принимать за исходное понятие «закон» или «правило» (по тем же соображениям, что в случае определения функции). Во-вторых, если функция служит одной из основных идей школьного обучения математике (по крайней мере, к этому мы должны стремиться), то естественно использовать функциональную точку зрения и при формировании общего понятия операции.

3.3. При изучении арифметических операций мы должны постепенно готовить учащихся к возможным обобщениям для перехода к общему понятию операции и к изучению других операций, отличающихся от арифметических. С этой целью важно подчеркнуть сходство свойств сложения и умножения, роли нуля по отношению к сложению и единицы по отношению к умножению. Термин «нейтральный элемент» множества относительно операции весьма наглядно отражает обозначаемое свойство: при сложении с нулем и при умножении на единицу любой элемент множества остается без изменения, не переходит в другой элемент множества.

Операции сложения и умножения не изолированы, они связаны между собой свойством дистрибутивности (или распределительности). Важно отметить односторонность этого свойства, наличие дистрибутивности умножения относительно сложения (умножение на сумму «распределяется» на каждое слагаемое суммы: $a(b+c) = ab+ac$ для любых трех

чисел a, b, c) и отсутствие дистрибутивности сложения относительно умножения (сопоставление «обычной» алгебры с булевой в этом отношении весьма поучительно).

Целесообразны и такие упражнения, в которых рассматриваются операции, отличные от «обычных» (до изучения операций над векторами, высказываниями и другими нечисловыми объектами).

Приведем несколько типов таких упражнений.

1. В множестве, состоящем из двух чисел 0 и 1, введены две операции «$\cdot$» и «$\vee$», где «$\cdot$» — обычное умножение, а «$\vee$» — определяется следующим образом: $x \vee y = x + y - x \cdot y$ («+», «—» и «$\cdot$» — знаки обычных операций сложения, вычитания и умножения соответственно).

Требуется: а) доказать, что операции «$\cdot$» и «$\vee$» выполнимы в данном множестве и коммутативны; б) доказать, что имеют место два свойства дистрибутивности: $x \cdot (y \vee z) = (x \cdot y) \vee (x \cdot z)$ — дистрибутивность операции «$\cdot$» относительно операции «$\vee$» и $x \vee (y \cdot z) = (x \vee y) \cdot (x \vee z)$ — дистрибутивность операции «$\vee$» относительно «$\cdot$»; в) составить таблицу для выполнения операции «$\vee$» в заданном множестве.

Замечание. Если в этом упражнении 0 и 1 интерпретировать как значения истинности высказываний (1 — истинно, 0 — ложно), то операция «$\cdot$» интерпретируется как конъюнкция, а «V» — как дизъюнкция высказываний.

2. В некотором множестве введены две операции:

$$x \bigcirc y = y \text{ и } x \square y = x.$$

Доказать, что обе эти операции некоммутативны и ассоциативны.

3. В множестве $\{0, 1, 2\}$ введены две операции: $x \oplus y$ — остаток от деления суммы чисел x и y на 3 и $x \odot y$ — остаток от деления произведения чисел x и y на 3.

Требуется: а) составить таблицы для выполнения этих операций в заданном множестве чисел; б) определить, выполнимы ли эти операции в заданном множестве; в) выяснить, являются ли эти операции коммутативными, ассоциативными.

4. Алгебраические структуры

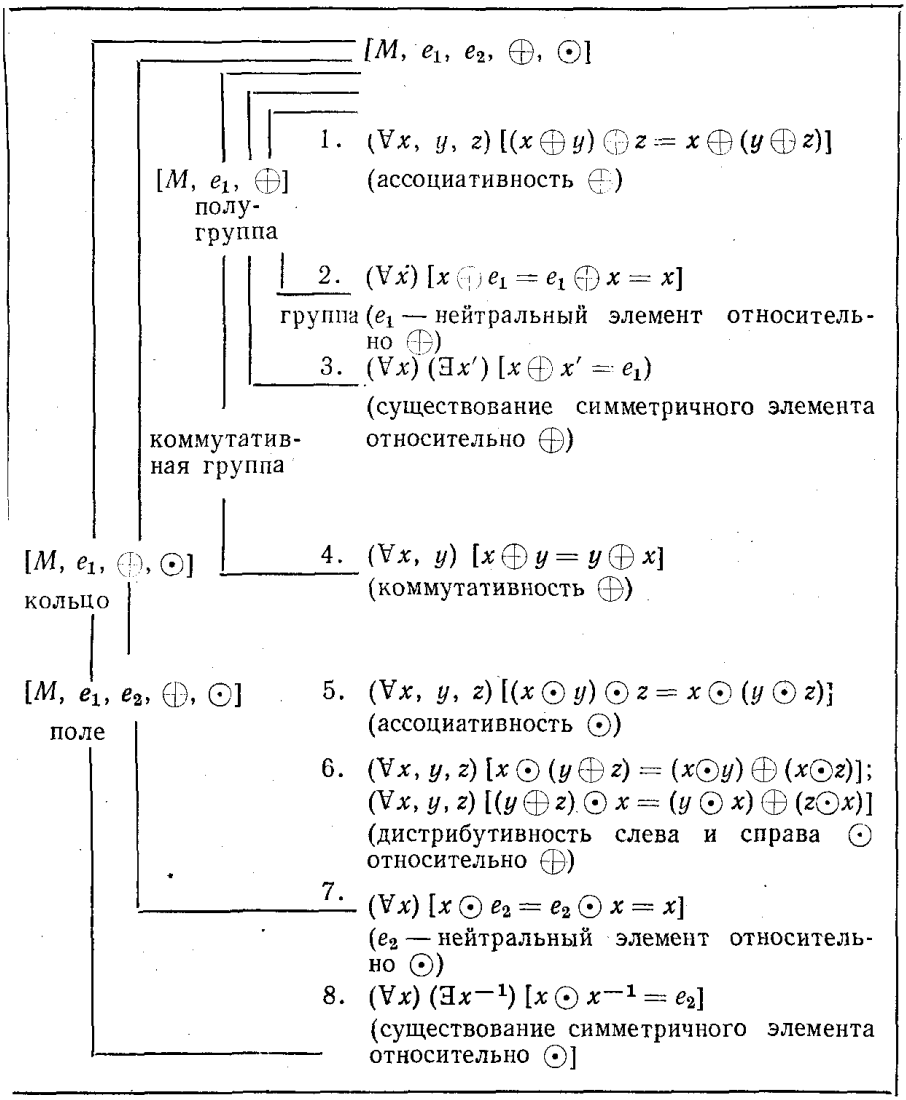
4.1. Операции не могут рассматриваться в отрыве от множеств, над элементами которых они выполняются. Вводя в множество одну или несколько операций, мы, естест-

венно, приходим к одной из фундаментальных конструкций современной математики — *алгебраической структуре* (алгебраической системе, или алгебре).

Идея структуры — одна из фундаментальных идей, на базе которых осуществляется современная систематизация математических фактов.

Естественно, что школьная математика, если мы стремимся к ее идейному сближению с современной математикой, должна отражать в какой-то мере эту систематизацию.

Таблица 19.1



Систематизация учебного материала на базе идеи структуры, разумеется, возможна и без явного введения определенных типов структур и соответствующей терминологии, хотя было бы естественно, чтобы понятие алгебраической структуры выделялось одновременно с общим понятием операции и иллюстрировалось многочисленными примерами алгебраических структур на множествах чисел, векторов, геометрических преобразований, изучаемых в школьном курсе.

Обязательная для всех программа не включает алгебраические структуры. Их изучение на факультативных занятиях, особенно в классах с углубленным изучением математики, представляется весьма уместным.

4.2. Ознакомление учащихся с типами алгебраических структур целесообразно строить, постепенно расширяя систему двух аксиом, характеризующую род полугрупп, и приводя иллюстрирующие модели, в том числе конечные.

Постепенное расширение системы аксиом от системы, характеризующей полугруппу, к системе, характеризующей поле, показано в табл. 19.1.

Важнейшие типы алгебраических структур (группа, кольцо, поле) характеризуются небольшим числом аксиом, и фрагмент теории этих структур является подходящим материалом для иллюстрации аксиоматического метода. Мы это подробно показали при рассмотрении проблемы ознакомления учащихся старших классов с современным аксиоматическим методом.

20. УРАВНЕНИЕ И НЕРАВЕНСТВО

1. Содержание

1.1. Уравнение и неравенство — традиционная тема школьного курса математики, занимающая большое место, начиная с младших классов, где простейшие уравнения и неравенства решаются до введения теории на основе свойств арифметических действий, и кончая старшими классами, где решаются трансцендентные уравнения, а также системы уравнений.

Кроме того, и это особенно важно, уравнения, неравенства и их системы представляют собой тот алгебраический аппарат, тот язык, на который переводятся разного рода задачи, в том числе и прикладные, строятся их математические модели.

1.2. Программа 1981 г. (базисная) следующим образом распределяет материал данной темы.

В IV—V классах рассматривают составление и решение линейных уравнений.

В VI—VIII классах изучают: уравнение; корни уравнения; линейные уравнения с одним неизвестным; квадратное уравнение; решение простейших рациональных уравнений; линейное уравнение с двумя неизвестными; уравнение прямой на плоскости; систему уравнений; решение системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными и его геометрическую интерпретацию; решение простейших систем, содержащих уравнение второй степени; линейные неравенства с одним неизвестным; числовые промежутки; систему линейных неравенств с одним неизвестным и ее решение; неравенство второй степени с одним неизвестным.

В IX—X классах рассматривают: решение рациональных уравнений и неравенств; метод интервалов; простейшие иррациональные, показательные, логарифмические и тригонометрические уравнения и неравенства; решение уравнений и неравенств, сводящихся к простейшим; решение систем уравнений и неравенств; понятие о равносильности уравнений, неравенств и систем уравнений и неравенств.

2. Различные трактовки

2.1. В педагогико-математической литературе в течение длительного времени велась дискуссия по вопросу, что такое уравнение (неравенство). Были предложены различные трактовки общего понятия уравнения (неравенства). Эти трактовки (исключая, разумеется, явно некорректные) по существу приписывают термину «уравнение» различные смысловые значения. Поэтому неправомерно говорить о правильности или неправильности той или иной трактовки понятия уравнения (неравенства). Можно лишь говорить о целесообразности или нецелесообразности (педагогической) той или иной трактовки этих понятий.

2.2. Известна точка зрения, согласно которой тождество как равенство, справедливое (верное) при всех допустимых значениях входящих в него букв, противопоставляется уравнению как равенству, справедливому не при всех допустимых значениях букв — неизвестных.

Если принять эту точку зрения, мы не сможем ответить на вопрос, что представляет собой запись «$f(x)=\varphi(x)$» (уравнение или тождество), пока не выясним, при всех или не при всех допустимых значениях неизвестного имеет ме-

сто равенство. Если дано, например, уравнение $ax=b$, то, согласно данной точке зрения, при $a\neq 0$ это — уравнение, а при $a=b=0$ — уже не уравнение, а тождество.

2.3. Известна другая точка зрения, согласно которой тождество не противопоставляется уравнению, а трактуется как его частный случай, причем уравнение рассматривается как равенство значений двух функций.

Равенство $f(x)=\varphi(x)$ (мы ограничимся рассмотрением уравнений с одним неизвестным) может оказаться верным при всех допустимых значениях неизвестного x, и тогда это уравнение — тождество. Оно может быть верным только при некоторых (не при всех) значениях неизвестного, называемых корнями уравнения, но, возможно, что не найдется ни одного значения неизвестного, удовлетворяющего этому равенству. В последнем случае говорят, что уравнение не имеет корней (решений). Но существует ли само уравнение, если под ним понимать равенство, а последнее не имеет места ни при каких допустимых значениях неизвестного?

В этой, как и в первой (см. 2.2), трактовке трудности возникают по существу из-за двусмысленности термина «равенство», фигурирующего в определении уравнения. Термином «равенство» обозначают: а) отношение равенства, понимаемое как совпадение, представляющее собой модель общего отношения эквивалентности (рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение); б) предложение о равенстве как синтаксическое образование, содержащее знак $=$, которое, разумеется, может оказаться истинным или ложным (верным или неверным равенством).

2.4. Известна также точка зрения, согласно которой уравнение — это не само равенство, а лишь вопрос о существовании значений неизвестного, при которых имеет место равенство. Принятие этой точки зрения также приводит к трудностям. В соответствии с ней запись $s=gt^2/2$ не представляет собой уравнения, пока не поставлен вопрос о существовании значений «неизвестных», при которых имеет место равенство, вместе с тем физики говорят, что это — «уравнение свободного падения тел».

Точка зрения на уравнение как на «вопрос» по существу отождествляет понятия «уравнение» и «решить уравнение». Действительно, решить уравнение — значит ответить на вопрос, существуют ли (а если существуют, то сколько и какие) значения неизвестного (или неизвестных), которые удовлетворяют уравнению. Но при этом вопрос о том, что такое само уравнение, остается открытым.

Совершенно очевидна нецелесообразность такой трактовки. Она не приносит никакой пользы.

Первое разъяснение понятия уравнения в учебнике для IV класса дается следующим образом: «Равенство, содержащее неизвестное число, называют *уравнением*. Найденное значение неизвестного числа называют *корнем уравнения*. Решить уравнение — значит найти все его корни» (*Виленкин Н. Я., Чесноков А. С., Шварцбурд С. И.* Математика 4. М., 1984, с. 60). Однако замена понятия переменной «неизвестным числом» приводит к трудностям. Например, решая уравнение $f(x)=g(x)$ графически, мы пользуемся графиками функций $f(x)$ и $g(x)$, а здесь x уже переменная. Кроме того, не совсем ясно, что такое «значение числа» (пусть пока и неизвестного). Эта трактовка уравнения также не согласована с физическими представлениями. Например, в уравнении $s=gt^2/2$ t — независимая, а s — зависимая переменная. Необходимо также отметить нежелательность исключения из школьной математики понятия переменной и с точки зрения программирования, изучение которого в школе предписано реформой (переменная — обязательный элемент любого алгоритмического языка).

Традиционная практика преподавания показывает, что учащиеся могут научиться решать уравнения и не зная, что такое уравнение. Но какова ценность такого «умения»? Дело сводится к усвоению отдельных алгоритмов для решения уравнений некоторых типов. Отсутствие же общих понятий и эффективно построенного на их базе учения об уравнениях лишает учащихся возможности использовать знания при решении новых типов уравнений и творческого поиска алгоритмов их решения.

Недооценка общих понятий уравнения и неравенства в традиционном обучении объясняется также недостаточной эффективностью известных толкований этих общих понятий.

Трудности, возникшие в связи с поисками целесообразного, эффективного толкования общих понятий уравнения и неравенства, обусловлены тем, что эти понятия стремились свести только к собственно математическим. Эти трудности снимаются, если выйти за рамки собственно математических объектов в их классическом понимании и использовать для трактовки общих понятий уравнения и неравенства некоторые понятия современной логики, в частности понятие логической функции (предиката).

В объяснительной записке к программе 1968 г. (Математика в школе, 1968, № 2, с. 10) по разделу «Алгебра (VI—

VIII классы)» сказано: «В связи с изучением уравнений и неравенств естественно познакомить учащихся с общими логическими понятиями «высказывание» и «предикат» и с употреблением элементарных логических символов следования ($\Rightarrow$) и равносильности ($\Leftrightarrow$)».

Данное предложение было неполностью и неудовлетворительно реализовано в школьных учебниках. Возможно, что эта идея эффективно реализуема лишь при углубленном изучении математики.

Разумеется, понятия «высказывание» и «предикат» найдут и другие многочисленные приложения в школьном курсе.

Рассмотрим с этой точки зрения общие понятия уравнения и неравенства, множества решений, применение логических понятий к анализу процесса решения уравнений, неравенств и их систем. Мы наметим лишь общие основы, на которых может быть построена конкретная методика учения об уравнениях и неравенствах.

3. Формирование общих понятий уравнения и неравенства на базе идеи логической функции [1]

3.1. В приведенной классификации выражений (см. гл. 13) уравнением названа формула, содержащая знак $=$, неравенством — формула, содержащая знак $<$ или $>$. Но это деление формул на уравнения и неравенства является чисто синтаксическим и не раскрывает смысла этих понятий. Все, что мы будем говорить дальше об уравнении, верно и для неравенства.

3.2. Что же представляет собой уравнение $T_1=T_2$?

Если ни один из термов T_1 и T_2 не содержит переменных, то уравнение $T_1=T_2$ есть истинное или ложное высказывание о равенстве (термин «равенство» понимается только в смысле отношения равенства). Так, $3+1=4$ — истинное высказывание о равенстве, а $3+1=5$ — ложное. Традиционно $3+1=4$ и $3+1=5$ не относят к уравнениям. Однако их отнесение к уравнениям оправдано не только с логической точки зрения (это будет выяснено дальше), но и с педагогической. Ведь, решая уравнения $x+3+1=4+x$ и $x+3+1=5+x$, мы преобразовываем их в равносильные им «уравнения» $3+1=4$ и $3+1=5$, и именно в этих случаях учащиеся затрудняются определить «множества решений».

---

[1] Этот материал предназначен для факультативных занятий и классов с углубленным изучением математики.

Основной интерес в учении об уравнениях представляет, разумеется, случай, когда хотя бы один из термов (одна из частей) уравнения (T_1 или T_2) содержит переменные. В этом случае уравнение $T_1 = T_2$ уже представляет собой не высказывание, а высказывательную форму, определяющую некоторую *логическую* функцию числовой переменной (или числовых переменных).

Уравнение всегда рассматривается на каком-то определенном множестве (область определения логической функции). Подмножество этого множества, на котором оно обращается в истинное высказывание (область истинности логической функции), называется *множеством решений* уравнения.

Задача «решить уравнение» означает требование определить множество решений уравнения.

Совершенно очевидно, что множество решений уравнения существенно зависит от того множества, на котором рассматривается это уравнение. Так, уравнение $x^2+x-2=0$ на множестве $A=\{3, 4, 5, 6, 7\}$ не имеет решений, множество решений пусто:

$$\{x \mid x \in A \text{ и } x^2 + x - 2 = 0\} = \varnothing,$$

так как ни один элемент множества A не обращает высказывательную форму $x^2+x-2=0$ в истинное высказывание. На множестве же N это уравнение имеет одно решение:

$$\{x \mid x \in N \text{ и } x^2 + x - 2 = 0\} = \{1\},$$

на множестве Z — два решения:

$$\{x \mid x \in Z \text{ и } x^2 + x - 2 = 0\} = \{1, -2\}.$$

3.3. Обычно на различных этапах обучения мы решаем уравнения в различных множествах (N, Z, Q, R), каждое из которых на соответствующем этапе является универсальным числовым множеством.

Рассмотрим решение уравнений в множестве R, допускающее важное геометрическое истолкование.

а) Уравнение с одной переменной на множестве R определяет отображение $R \longrightarrow \{И, Л\}$, т. е. логическую функцию с областью определения R, принимающую значения из $\{И, Л\}$. Множество E решений этого уравнения — подмножество R ($E \subseteq R$).

Геометрически вещественное число — точка прямой, а множество R — множество всех точек прямой или, как обычно говорят,— прямая. Множество E — подмножество точек прямой, а каждое решение — точка прямой.

б) Уравнение с двумя переменными — двуместная высказывательная форма, определяющая на множестве R^2 всевозможных пар вещественных чисел логическую функцию $R^2 \longrightarrow \{И, Л\}$. Множество E решений этого уравнения — подмножество R^2 ($E \subseteq R^2$), а каждое решение — пара вещественных чисел.

Геометрически каждая пара вещественных чисел — точка плоскости, а R^2 — множество всех точек плоскости или, как говорят, плоскость. Множество E — подмножество точек плоскости, а каждое решение — точка плоскости.

в) Уравнение с тремя переменными — трехместная высказывательная форма, определяющая на множестве R^3 всевозможных троек вещественных чисел логическую функцию $R^3 \longrightarrow \{И, Л\}$. Множество E решений этого уравнения — подмножество R^3 ($E \subseteq R^3$), а каждое решение — тройка вещественных чисел.

Геометрически каждая упорядоченная тройка вещественных чисел — точка пространства, а R^3 — множество всех точек пространства или просто пространство (трехмерное). Множество E — подмножество точек пространства, а каждое решение — точка пространства.

г) Путь к дальнейшему обобщению открыт. Уравнение с n переменными

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=b,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ — определенные вещественные числа (имена чисел), а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — переменные для вещественных чисел, представляет собой n-местную высказывательную форму, определяющую n-местный предикат на множестве R^n всевозможных наборов из n вещественных чисел или отображение $R^n \longrightarrow \{И, Л\}$. Множество E решений этого уравнения — подмножество R^n ($E \subseteq R^n$), а каждое решение — упорядоченная система из n вещественных чисел.

Удобно и здесь воспользоваться геометрическим языком. Каждый набор (упорядоченная система) из n вещественных чисел называется *точкой* n-мерного пространства, тогда R^n — множество всех точек n-мерного пространства или n-мерное пространство. Множество E в этом случае — подмножество точек n-мерного пространства, а каждое решение уравнения — точка n-мерного пространства или n-мерный вектор.

3.4. Обозначим уравнение $f(x)=\varphi(x)$, рассматриваемое на некотором множестве A, через $L(x)$, т. е. $L(x)$ — логическая функция (одноместный предикат) с областью опреде-

ления A (при любом значении x из A $L(x)$ принимает значение И или Л).

Тогда множество E решений уравнения $L(x)$ запишется так:

$$E = \{x \mid x \in A \text{ и } L(x)\}.$$

Пусть на множестве A определены два уравнения $L(x)$ и $L_1(x)$.

Исходя из общего понимания отношения следования между предикатами получаем следующее толкование этого отношения между уравнениями: уравнение $L_1(x)$ является следствием уравнения $L(x)$, если $L_1(x)$ обращается в истинное высказывание, по крайней мере, при всех тех значениях x (из A), при которых $L(x)$ обращается в истинное высказывание, т. е. если истинно высказывание

$$\forall x (L(x) \Rightarrow L_1(x)). \qquad (1)$$

Естественно, возникает вопрос, в каком отношении находятся в этом случае множества решений этих уравнений.

Из определения следования получается, что $E \subseteq E_1$.

Если каждое из двух уравнений является следствием другого, т. е. если истинно высказывание

$$\forall x [(L(x) \Rightarrow L_1(x)) \text{ и } (L_1(x) \Rightarrow L(x))],$$

то эти уравнения эквивалентны, или равносильны, т. е. истинно высказывание $\forall x \ (L(x) \Leftrightarrow L_1(x))$. Это означает, что $E \subseteq E_1$ и $E_1 \subseteq E$, следовательно, $E = E_1$.

Таким образом, уравнения $L(x)$ и $L_1(x)$ равносильны тогда и только тогда, когда множества их решений совпадают.

3.5. Простота описываемой теории уравнений и неравенств наглядно видна в ее применениях, в частности, при сведении сложных уравнений и неравенств к более простым, определении множеств решений первых через множества решений последних, системы уравнений и др.

Приведем несколько примеров.

Пример 1. Отношение эквивалентности уравнений с точки зрения теории уравнений сводится к логическому отношению эквивалентности. Этим по существу мы и пользуемся в процессе решения уравнений и неравенств. Например, решая уравнение $(x-1)(x-2)=0$, устанавливаем эквивалентность

$$(x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \text{ или } x-2 = 0$$

(приведенная запись есть точный перевод на символический

язык утверждения: «произведение $(x-1)(x-2)$ равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю, т. е. когда $x-1=0$ или $x-2=0$») и определяем область истинности дизъюнкции как объединение областей истинности составляющих ее более простых высказывательных форм (линейных уравнений):

$$\{x \mid (x-1)(x-2)=0\} = \{x \mid x-1=0 \text{ или } x-2=0\} = \\ = \{x \mid x-1=0\} \cup \{x \mid x-2=0\} = \\ = \{1\} \cup \{2\} = \{1;\ 2\}.$$

Вообще, решая уравнение $f_1(x) f_2(x) = 0$, мы устанавливаем эквивалентность $f_1(x) f_2(x) = 0 \Leftrightarrow f_1(x) = 0$ **или** $f_2(x) = 0$ (на пересечении областей определения функций f_1 и f_2) и на этом основании получаем

$$\{x \mid f_1(x) f_2(x) = 0\} = \{x \mid f_1(x) = 0 \text{ или } f_2(x) = 0\} = \\ = \{x \mid f_1(x) = 0\} \cup \{x \mid f_2(x) = 0\} = \\ = E_1 \cup E_2, \text{ где } E_1 = \{x \mid f_1(x) = 0\}, \\ E_2 = \{x \mid f_2(x) = 0\}.$$

Пример 2. Решая уравнение $|f_1(x)| + |f_2(x)| = 0$, мы пользуемся эквивалентностью $|f_1(x)| + |f_2(x)| = 0 \Leftrightarrow f_1(x) = 0$ **и** $f_2(x) = 0$, поэтому множество решений данного уравнения выражается через множество E_1 и E_2 следующим образом:

$$\{x \mid |f_1(x)| + |f_2(x)| = 0\} = \{x \mid f_1(x) = 0 \text{ и } f_2(x) = 0\} \\ = \{x \mid f_1(x) = 0\} \cap \{x \mid f_2(x) = 0\} = E_1 \cap E_2.$$

Пример 3. Решая уравнение $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, мы устанавливаем эквивалентность

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0 \Leftrightarrow f_1(x) = 0 \text{ и } \overline{f_2(x) = 0}$$

(дробь, или частное, $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ равна нулю тогда и только тогда, когда числитель (делимое) равен нулю, а (в смысле «и») знаменатель (делитель) не равен нулю), откуда следует:

$$\left\{x \,\middle|\, \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0\right\} = \{x \mid f_1(x) = 0 \text{ и } f_2(x) \neq 0\} = \\ = \{x \mid f_1(x) = 0\} \cap \{x \mid f_2(x) \neq 0\} = \\ = E_1 \cap \overline{E}_2, \text{ где } \overline{E}_2 = R \setminus E_2.$$

3.6. Рассмотрим понятие «система уравнений». Введение этого понятия может служить наглядным примером того, как порой в обучении искусственно усложняются про-

стые вопросы в поисках их «доступного разъяснения» учащимся. В школьных учебниках мы находим такие определения (или разъяснения) системы уравнений, которые ни с логической, ни с дидактической точки зрения не приемлемы.

Так, в различных изданиях учебного пособия для X класса средней школы «Алгебра и начала анализа» под редакцией академика А. Н. Колмогорова (М., 1976) находим такое определение: система уравнений — это конечное множество уравнений. Совершенно очевидна некорректность этого определения. Конечное множество уравнений может и не образовать систему уравнений. К тому же это «определение» ничего не дает, никакого полезного следствия нельзя из него получить. Поэтому авторы вынуждены специально определить и понятие «решение системы», и понятие «равносильные системы», а отношение $\Leftrightarrow$ равносильности предложений применяют к системам, представляющим собой, согласно данному определению, множества.

Несостоятельность такой точки зрения на систему уравнений учтена в последующем издании названного учебного пособия, в котором содержится следующее разъяснение: «Если дано несколько уравнений $f_k(x, y)=g_k(x, y)$, где $k=1; 2, 3,..., m$, то можно образовать такое предложение «Все данные равенства верны». Это предложение называется образованной из данных уравнений системой уравнений» (М., 1980, с. 221).

Данное «разъяснение» вряд ли многое проясняет. К тому же такое понятие системы отличается от общепринятого, так как предложение «Все данные равенства верны» — это лишь предложение об уравнениях (метапредложение), в котором сами уравнения не участвуют.

Что же в действительности, в обычной практике обучения, понимают под системой уравнений (или неравенств)? Система уравнений (или неравенств) — конъюнкция этих уравнений (или неравенств). Так, под системой

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x,\ y) = 0; \\ f_2(x,\ y) = 0 \end{array}\right\}$$

понимают конъюнкцию

$$f_1(x, y)=0 \text{ и } f_2(x, y)=0,$$

а следовательно, множество решений системы есть область истинности этой конъюнкции или пересечение множеств решений уравнений системы:

$$\{(x;\ y)\,|\,f_1(x;\ y)=0 \text{ и } f_2(x;\ y)=0\}=\{(x;\ y)\,|\,f_1(x;\ y)=0\}\cap$$
$$\cap\{(x;\ y)\,|\,f(x;\ y)=0\}.$$

Однако об этом учащимся не говорят, а лишь пытаются окольными путями объяснить им, что такое система уравнений. Если в школьном обучении никак нельзя применить термин «конъюнкция», то можно определить систему уравнений и так: «два или более уравнения (неравенства), соединенные союзом «и», образуют систему уравнений (неравенств)». Таким же образом можно обойти и термин «пересечение множеств» и сказать, что множество решений системы состоит из общих решений уравнений системы (так же, как вместо «геометрическая фигура есть множество точек» можно сказать «геометрическая фигура состоит из точек»).

21. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ. ИНТУИТИВНЫЕ И ТОЧНЫЕ ПОНЯТИЯ

1. Общие замечания

1.1. Введение в школьный курс начал анализа значительно обогащает его идейное содержание и расширяет его прикладную сторону. Вместе с тем в школьной математике появляются понятия более высокой степени сложности, нуждающиеся в тщательной дидактической обработке.

Однако изложение наиболее сложных понятий предела и непрерывности в действующих школьных учебниках оказалось неприемлемым с дидактической точки зрения, хотя в теоретическом плане безукоризненным. Можно отметить два основных недостатка изложения: во-первых, вместе с включением начал анализа в школьную программу в школьное обучение перенесена (без особых изменений, если не считать опускание некоторых сложных доказательств) вузовская методика их изложения; во-вторых, уровень строгости этого изложения явно превышает допустимый уровень строгости «математики для всех», предназначенной для обязательного изучения ее всеми учащимися.

Трудности, возникшие в усвоении понятий предела и непрерывности привели к слабым и формальным знаниям, к низкому уровню понимания материала. Интуитивные представления о пределе и (особенно) о непрерывности могут быть сформированы достаточно ясно. Однако, как показывает опыт, переход к классическим формулировкам точных определений этих понятий приводит к тому, что то, что

казалось усвоенным на интуитивном уровне, становится совершенно неясным на более высоком уровне точных математических понятий.

Правомерно возникает вопрос, должны ли эти точные математические понятия включаться в «математику для всех». Недостаточно ли ознакомить учащихся с интуитивными понятиями предела и непрерывности?

1.2. Программа 1981 г. (базисная) не предусматривает изучение понятий предела и непрерывности всеми учащимися. Элементы теории пределов исключены из этой программы, что, однако, не означает прекращения всяких поисков новых подходов к изучению этих понятий в школе, на интуитивном уровне всеми учащимися и с переводом интуитивных понятий в точные математические в классах с углубленным изучением математики.

Исторически понятие производной возникло до того, как в математике было выработано точное определение предела функции, и, несмотря на этот логический пробел, математикам XVII—XVIII вв. оно казалось достаточно ясным. Таким же интуитивным долгое время оставалось и понятие непрерывности функции. По-видимому, в данном случае школьное обучение должно быть ближе к историческому процессу, чем к современным тенденциям.

Умение учеников разъяснить «своими словами» на «неточном языке», что́ они понимают под непрерывностью и пределом функции, очевидно, не менее важно, чем умение формулировать точные определения (особенно в тех случаях, когда в этих формулировках не все понятно учащимся).

1.3. Рассмотрим один из возможных методических подходов к введению понятий предела последовательности, предела и непрерывности функции. Изучение этих вопросов на интуитивном уровне целесообразно проводить в обычных классах, перевод интуитивных понятий в точные математические — при углубленном изучении математики.

2. Предел последовательности

2.1. По существу речь идет о пределе функции в бесконечности для частного случая, когда функция определена на множестве N, так как под последовательностью понимают функцию натурального аргумента ($f: n \longrightarrow a_n$, $n \in N$).

С педагогической точки зрения выделение этого частного случая вполне оправдано, с одной стороны, его интуитивной ясностью и наглядностью, с другой — наличием многих

приложений, в том числе в самом курсе математики (бесконечные прогрессии, длина окружности, площади и объемы и т. д.).

2.2. Наметим одну из возможных схем привлечения учащихся к построению «маленькой теории» предела последовательности. За основу целесообразно брать эмпирический материал, состоящий из разнообразных примеров последовательностей, математизируемых с помощью новых понятий.

Рассмотрим, например, последовательности:

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots; \tag{1}$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots; \tag{2}$$

$$1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots; \tag{3}$$

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots, \frac{1}{n^2}, \ldots; \tag{4}$$

$$-2, 4, -8, \ldots, (-1)^n \cdot 2^n, \ldots; \tag{5}$$

$$\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2^n}, \ldots; \tag{6}$$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots; \tag{7}$$

$$-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \ldots, (-1)^n \frac{n}{n+1}, \ldots; \tag{8}$$

$$-1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots; \tag{9}$$

$$\frac{1}{10}, -\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \ldots, (-1)^{n+1}\frac{1}{10}, \ldots; \tag{10}$$

$$1, \frac{1}{2}, 2, \frac{2}{3}, 3, \frac{3}{4}, \ldots, n, \frac{n}{n+1}, \ldots; \tag{11}$$

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots, \frac{2^n-1}{2^n}, \ldots \tag{12}$$

и их изображения с помощью точек координатной прямой (рис. 60). Эти изображения позволяют обнаружить существенные различия в «поведении» последовательностей.

Для некоторых последовательностей ((2), (4), (6) — (10), (12)) можно указать отрезки прямой, содержащие *все* члены последовательности, для других ((1), (3), (5), (11)) таких отрезков не существует. Такое различие в поведении последовательностей могут заметить и сами уча-

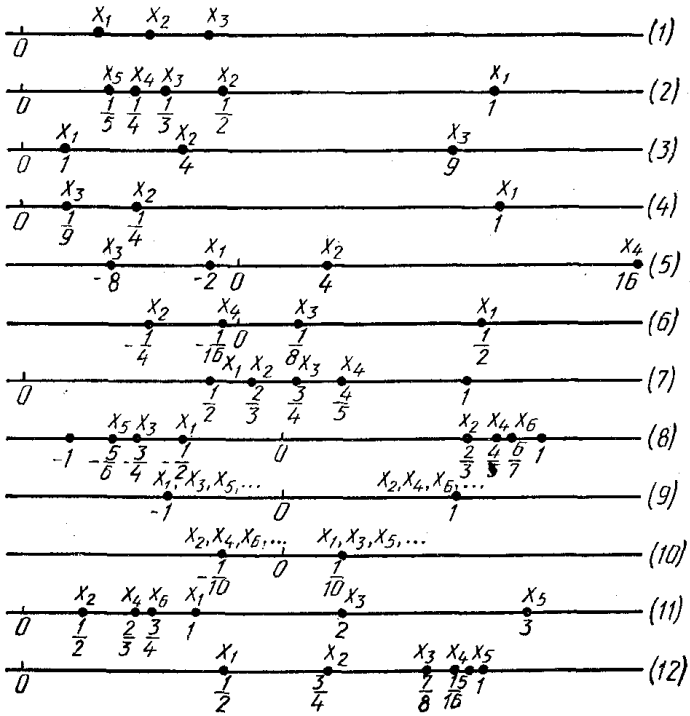


Рис. 60

щиеся. Если же они не заметят, следует помочь приблизиться к открытию этого различия с помощью «наводящих» вопросов или указаний, например, таких: сравните расположение на координатной прямой точек, изображающих члены последовательностей (1) и (2), (3) и (4), (5) и (6); можно ли указать отрезок прямой, содержащий точки, изображающие все члены последовательности (1), (2), (3), (4) и т. д.; какому отрезку принадлежат все члены последовательности (2), (4), (6), (7), (8), (9), (10), (12); запишем найденные отрезки как отрезки числовой прямой, т. е. как подмножества R. С помощью такой системы вопросов и ответов образуется интуитивное представление об ограниченности или неограниченности последовательности. Возникает проблема математического описания этих свойств, перевода интуитивного представления в точное математическое понятие.

Найденные отрезки числовой прямой ($[0; 1]$, $[0; 1]$, $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, $[-1; 1]$, $[-1; 1]$, $\left[-\frac{1}{10}; \frac{1}{10}\right]$, $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$) подсказывают нам способ перевода интуитивного представления об ограниченности последовательности в точное мате-

матическое понятие (если существует отрезок, содержащий все члены последовательности, то существует положительное число, такое, что все члены последовательности не превышают его по модулю).

Если же возникают затруднения, можно спросить, существует ли положительное число, обладающее таким свойством: любой член последовательности ((1), (2), (3), (4), ...) не больше этого числа по модулю. Так, приходим к определению: (x_n) — ограниченная последовательность, если существует положительное число a, такое, что $|x_n| \leqslant a$ для любого n, или, если использовать символические обозначения кванторов,

$$\exists a > 0 \ \forall n \ (|x_n| \leqslant a).$$

Если последовательность не обладает свойством ограниченности, то она называется *неограниченной*, и запись того, что последовательность (x_n) неограничена, можно получить как отрицание свойства ограниченности: не существует положительного числа a, такого, что для любого n имеет место $|x_n| \leqslant a$, или для любого положительного числа a существует n, такое, что $|x_n| > a$, т. е.

$$\overline{\exists a > 0 \, \forall n \, (|x_n| \leqslant a)}, \text{ или } \forall a \ \exists n \ (|x_n| > a).$$

Замеченное различие, с помощью которого выделились классы ограниченных и неограниченных последовательностей, не единственное для рассматриваемых последовательностей.

Наблюдая геометрические изображения последовательностей (см. рис. 60), обнаруживаем еще одно различие. У некоторых последовательностей образуются «скопления» членов вокруг одной или нескольких точек, у других таких скоплений нет. Так, в последовательностях (2), (4), (6) подобные скопления наблюдаются вокруг точки 0, в последовательностях (7), (11), (12) — вокруг точки 1, в последовательностях (8) и (9) — вокруг точек 1 и —1, в последовательности (10) — вокруг точек 1/10 и —1/10.

Возникает проблема математического описания явления, которое мы назвали «скоплением» членов последовательности. Но прежде всего необходимо выяснить, все ли «скопления» одинаковы по своей структуре.

Для приближения учащихся к открытию различных типов «скоплений» членов последовательностей можно предложить им сравнить «скопления» членов последовательностей, например (7) и (11), вокруг точки 1. Чтобы облегчить

этот процесс, следует выбрать произвольный отрезок с серединой в точке 1, например длиной 1, т. е. [1—0,5; 1+0,5], и выяснить, какое множество членов последовательностей (7) и (11) попадает внутрь этого отрезка, какое остается вне его. Затем можно уменьшить длину отрезка (скажем, в 10 раз), т. е. взять отрезок с серединой в точке 1 длиной 0,1, а именно [1—0,05; 1+0,05], и поставить тот же вопрос.

С помощью таких вопросов постепенно выясняется существенное различие между «скоплениями» членов этих двух последовательностей вокруг точки 1. Оказывается, что в любую «окрестность» точки 1 (здесь уместно ввести этот термин для отрезков с серединой в точке 1) попадает бесконечное множество членов как последовательности (7), так и последовательности (11). Это свойство характеризует всякое «скопление» членов последовательности (без него нет «скопления»). Однако между рассматриваемыми двумя «скоплениями» есть существенное различие: вне всякой окрестности точки 1 остается всегда *конечное* множество членов последовательности (7), а для последовательности (11) это свойство не выполняется; уже вне тех двух окрестностей, которые мы рассматривали, находится бесконечное множество членов последовательности. Иными словами, какую бы окрестность точки 1 мы ни взяли, можно найти такой номер n, начиная с которого все члены последовательности (7) (т. е. с номерами не меньше n) попадают в эту окрестность. Для последовательности же (11) такого номера найти нельзя (важно рассмотреть это различие и сделать его интуитивно ясным. Разумеется, следует «подталкивать» учащихся к самостоятельному открытию этого различия с помощью вопросов-подсказок, постановка которых очевидна).

После выявления двух видов «скоплений» можно предложить учащимся отнести каждое из наблюдаемых на рис. 60 «скоплений» к одному из этих видов (к первому — (7), (2), (4), (6), (8), (12); ко второму — (9), (10), (11)).

Теперь можно сообщить учащимся, что нас будут интересовать лишь «скопления» первого вида (именно они играют важную роль как в самой математике, так и в ее приложениях), поэтому, естественно, возникает проблема их математического описания. Анализ интуитивного представления о такого рода «скоплениях» приводит к уточнению этого вопроса. Необходимо прежде всего описать математически «попадание» члена x_n последовательности в произвольную окрестность точки 1 длиной, например, 2ε, т. е. внутрь от-

резка $[1-\varepsilon;\ 1+\varepsilon]$. В таком случае расстояние между точками x_n и 1 должно быть меньше ε, т. е. $|x_n-1|<\varepsilon$.

Таким образом, предложение «x_n находится внутри отрезка $[1-\varepsilon;\ 1+\varepsilon]$ (ε-окрестности точки 1)» равносильно неравенству

$$|x_n-1|<\varepsilon$$

(уяснение этой равносильности, достигаемое без особых затруднений с помощью весьма наглядной геометрической картины, является ключом к пониманию многих вопросов анализа и делает доступным так называемый «ε — δ-язык»).

Возникает вопрос: как выяснить, с какого номера n все члены последовательности (7) попадают в ε-окрестность точки 1? Выполняются следующие действия:

а) $|x_n-1|=\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\left|\frac{-1}{n+1}\right|=\frac{1}{n+1}$;

б) $\frac{1}{n+1}<\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$;

в)

ε	$n_0=\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$	Начиная с какого n выполняется
0,1	9	10
0,05	19	20
0,01	99	100
...	...	...

Таким образом, убеждаемся, что какое бы мы ни взяли $\varepsilon>0$, т. е. какую бы ни взяли окрестность точки 1 длиной 2ε, всегда существует такое n_0, что для всех $n>n_0$ выполняется неравенство $|x_n-1|<\varepsilon$, т. е. все члены последовательности, начиная с (n_0+1)-го, попадают в ε-окрестность точки 1.

2.3. Для перехода к точному, математическому описанию обнаруженной особенности поведения некоторых ограниченных последовательностей необходимо детально рассмотреть какой-нибудь конкретный пример. Возьмем последовательность заштрихованных площадей (рис. 61), полу-

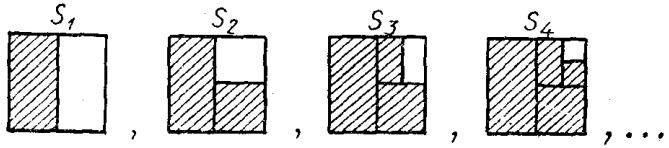


Рис. 61

чаемых следующим образом: в первом квадрате заштриховывается его половина, а в каждом следующем — половина оставшейся незаштрихованной части предыдущего квадрата. Воображая этот процесс бесконечным и наблюдая, как меняется заштрихованная площадь от одного квадрата к следующему, легко обнаружить, что последовательность

$$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$$

заштрихованных площадей:

1) возрастающая (каждая следующая заштрихованная площадь больше предыдущей);

2) ограничена, так как $\forall n$ $(s_n < 1)$ (любая заштрихованная площадь меньше площади всего квадрата, принятой равной 1);

3) заштрихованная площадь «подходит» сколь угодно близко к 1, т. е. продолжая процесс образования заштрихованных площадей достаточно далеко, мы можем получить площадь, отличающуюся от 1 сколь угодно мало. Иначе говоря, если наперед задать какое угодно малое положительное число ε, можно найти такой член последовательности, который отличается от 1 меньше, чем на ε $(1 - s_n < \varepsilon)$.

Рассматриваемую ситуацию целесообразно изучить и в другом, аналитическом, аспекте. Нетрудно найти значения заштрихованных площадей:

$$s_1 = \frac{1}{2}; \quad s_2 = \frac{3}{4}; \quad s_3 = \frac{7}{8}; \quad \ldots; \quad s_n = \frac{2^n - 1}{2^n}.$$

Итак, изучаем последовательность (12). Найдем разность между 1 и общим членом этой последовательности:

$$1 - \frac{2^n - 1}{2^n} = \frac{1}{2^n}.$$

И если мы хотим, чтобы разность стала меньше наперед заданного числа ε, т. е. чтобы $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, очевидно, достаточно взять $n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$. Полученное соотношение подтверждает и уточняет наше интуитивное предположение, что члены этой последовательности могут отличаться сколь угодно мало от 1.

Эту же ситуацию целесообразно рассмотреть и геометрически, получая изображения членов последовательности в виде точек прямой (см. рис. 60, (*12*)). Обнаруживается «скопление» точек, изображающих члены последовательно-

сти, около точки 1, т. е. в любом сколь угодно малом отрезке с правым концом в точке 1 находятся все члены последовательности, начиная с некоторого, а вне этого отрезка — лишь конечное число членов.

Так, если взять отрезок длины $\varepsilon=0{,}1$, то вне его окажутся первые три члена последовательности, а внутри — все, начиная с четвертого; если взять $\varepsilon=0{,}01$, то вне его окажутся первые шесть членов, а внутри — все остальные. Разумеется, если выбрать ε очень малым, вне этого отрезка может оказаться много членов последовательности, однако всегда конечное число, а внутри — все, начиная с некоторого.

Важно подчеркнуть, что в данном случае члены последовательности скапливаются у точки 1 и располагаются слева от этой точки (так как $\forall n\ (s_n<1)$).

Здесь необходимо привести примеры последовательностей, члены которых скапливаются около точки и располагаются справа от этой точки или с обеих сторон (члены последовательности

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

скапливаются около точки 0, располагаясь справа от нее, а члены последовательности

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, (-1)^n \cdot \frac{1}{n}, \ldots$$

скапливаются около точки 0, приближаясь к ней с обеих сторон).

В результате тщательного изучения последовательности (12), как и последовательности (7), приходим к выводу, что для любого $\varepsilon>0$ всегда существует такое n_0, что для всех $n>n_0$ выполняется неравенство $|s_n-1|<\varepsilon$ или в символической записи

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n\ (n>n_0 \Rightarrow |s_n-1|<\varepsilon).$$

Учащимся сообщают, что в таком случае говорят «число 1 является пределом последовательности (s_n)», и это обозначается кратко так: $\lim(s_n)=1$.

Таким образом, $\lim(s_n)=1$, т. е. по определению $\lim(s_n) \overset{\text{опр}}{=} 1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n\ (n>n_0 \Rightarrow |s_n-1|<\varepsilon)$.

После повторения учащимися описанной процедуры для других последовательностей ((2), (4), (6), (8)) осуществляется последний шаг в обобщении результатов проведенного исследования (переход от числа 1 к произвольному

числу a) и получают общее определение предела последовательности:

$$\lim (x_n) = a \overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n\ (n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon).$$

Как видно, определение нового понятия (предела последовательности) явилось итогом проведенного коллективного (т. е. выполненного всем классом) исследования ситуации, для математического описания которой оно и необходимо.

2.4. Возвращаясь к рассмотренному эмпирическому материалу (последовательностям, изображенным на рис. 60), замечаем, что в тех случаях, когда наблюдается скопление членов первого вида (последовательность имеет предел), оно имеется только вокруг одной точки (последовательность имеет единственный предел). Учащиеся, по-видимому, догадаются, что это не случайно. Если же возникнут затруднения, можно подсказать им путь рассуждения «от противного», т. е. попытаться опровергнуть возникшую гипотезу об единственности предела. Следует допустить, что какая-то последовательность имеет два различных предела a и b. Геометрическая картина на координатной прямой подсказывает опровержение такой возможности.

Описанная схема построения в процессе обучения «маленькой теории» обеспечивает активность учащихся не в усвоении готовых результатов, а в построении самой этой теории, и этим данная схема принципиально отличается от схемы обучения по традиционной методике.

Мы рассмотрели детально методику введения понятия предела последовательности потому, что именно в этом первом частном случае осуществляется математизация таких интуитивных понятий, как «скопление», «близость», «окрестность», играющих фундаментальную роль и в понятиях предела и непрерывности функции (методику введения которых мы не будем здесь детально рассматривать).

3. Предел функции

3.1. Понятие предела функции в бесконечности получается простым распространением на случай функции, определенной на множестве R, понятия предела последовательности:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l \overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists x_0\ \forall x\ (x > x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon).$$

Что же касается понятия предела функции в точке, то имеются различные подходы к введению этого понятия.

3.2. Интуитивное понятие о пределе функции в точке можно образовать на конкретных задачах.

Рассматривается в качестве примера свободное падение, в котором путь s выражается как функция времени t формулой $s=gt^2/2$ и промежуток времени Δt от момента t_0 до момента $t=t_0+\Delta t$.

Вычисляется путь Δs, пройденный телом за этот промежуток времени, и средняя скорость тела на этом промежутке, т. е.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = gt_0 + \frac{g}{2}\Delta t.$$

Подчеркивается, что при постоянном t_0 средняя скорость есть функция от Δt:

$$v_{\text{ср}}(\Delta t) = gt_0 + \frac{g}{2}\Delta t.$$

Затем с помощью таблицы значений обнаруживают, что, например, при $t_0=2$ при значениях Δt, приближающихся к нулю, соответствующие значения $v_{\text{ср}}$ приближаются к значению $v_0=gt_0=2g=19{,}6$. Сообщается, что иначе говорят: «Средняя скорость $v_{\text{ср}}$ при Δt, стремящемся к нулю, стремится к *пределу* v_0», и записывают это так:

$$v_0 = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}}(\Delta t)$$

(v_0 в физике считают «истинной» (или «мгновенной») скоростью в момент времени t_0).

Подобные примеры помогают формировать интуитивное понятие о пределе функции в точке: функция f имеет своим пределом число b в точке a (или, когда аргумент x стремится к a) означает, что значения $f(x)$ «приближаются» к b, если значения x «приближаются» к a. Записывают это так:

$$f(x) \to b, \text{ если } x \to a,$$

или

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Таким образом, предел функции f в точке a равен b, если $f(x)$ стремится к b, когда x стремится к a.

Эти формулировки, конечно, не служат математическими определениями, ибо содержат такие выражения, как «при-

ближаются», «стремится», которые не являются математическими терминами. Их назначение состоит лишь в том, чтобы разъяснить на интуитивном уровне, что означает «число b является пределом функции f в точке a» с помощью указанных выражений, смысл которых выявляется на конкретных примерах.

Такое интуитивное понятие предела функции вполне достаточно для изучения начал математического анализа всеми учащимися. Иными словами, в рамках «математики для всех» понятие предела функции может оставаться интуитивным.

Отсутствие упоминания предела в программе 1981 г. (базисной) можно истолковывать по-разному. Так, в пробном учебном пособии Ш. А. Алимова и др. «Алгебра и начала анализа 9—10» (М., 1982) на примере движения точки вдоль прямой чисто формально без всяких разъяснений сообщается, что число $v(t)$ (в физике это мгновенная скорость) называют пределом отношения, выражающего $v_{ср}$ при h, стремящемся к нулю, и дается запись

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}.$$

Затем переходят «к общему определению производной», которое, разумеется, ничего не определяет, так как «производная» вводится как синоним предела разностного отношения $\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$ при $h \to 0$, а это понятие само не определено.

3.3. Возникает вопрос, как же перевести, по крайней мере в классах с углубленным изучением математики, интуитивное понятие предела функции в точное, математическое — именно перевести, а не сформулировать готовое точное определение, которое оторвано от формулировок, разъясняющих интуитивное понятие.

Речь идет о том, чтобы, например, в формулировке «Число b есть предел функции f в точке a, если $f(x)$ стремится к b, когда x стремится к a» придать точный смысл выражениям «$f(x)$ стремится к b» и «x стремится к a», а также зависимости «стремления» $f(x)$ от «стремления» x, так как именно такая зависимость выражается в этой формулировке. В таком случае данная формулировка получит статус определения (естественного определения, совпадающего с интуитивным понятием) или же переход к одному из известных определений не приведет к «разрыву» с уже сформированным интуитивным понятием.

Математическое описание смысла перечисленных словесных выражений, разумеется, возможно с помощью различных средств математического языка, и в результате получают различные (эквивалентные) определения понятия предела функции.

Рассмотрим один из возможных «переводов».

Выражение «$f(x)$ стремится к b» означает, что «значения $f(x)$ неограниченно приближаются к числу b» или что абсолютная величина разности между $f(x)$ и b (или расстояние между соответствующими точками на координатной прямой) может стать как угодно малой, т. е. меньше любого положительного числа

$$|f(x)-b|<\varepsilon, \tag{1}$$

или значения $f(x)$ попадают в сколь угодно малую ε-окрестность точки b (это уже разъяснено при рассмотрении предела последовательности).

Такой же смысл имеет и выражение «x стремится к a», т. е. значения x попадают в сколь угодно малую окрестность точки a

$$|x-a|<\delta. \tag{2}$$

Таким образом, наша формулировка утверждает, что неравенство (1) выполняется при условии выполнения неравенства (2), т. е. если $|x-a|<\delta$, то $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Однако это еще не полный перевод данной формулировки. Так как связь между ε и δ явно не высказана (она лишь подразумевается, заложена в импликативной структуре формулировки), то это наиболее сложное место перевода.

Так как $f(x)$ неограниченно приближается к b, то $|f(x)-b|<\varepsilon$ при любом сколь угодно малом положительном ε. Чтобы обеспечить такое приближение $f(x)$ к b, важно иметь возможность выбрать для каждого ε соответствующее значение δ, характеризующее близость x к a.

Иными словами, для каждого $\varepsilon>0$ должно существовать такое $\delta>0$, чтобы для всяких значений x (за исключением $x=a$, где функция может и не быть определена, из предыдущего следует лишь, что она должна быть определена в любой окрестности точки a, но не обязательно в точке a) из δ-окрестности a значение $f(x)$ попадало в ε-окрестность b, т. е.

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\neq a\,(|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon).$$

Можно применить и такой конструктивный способ разъяснения сущности этого определения. На рис. 62 изображен

график функции $y = f(x)$, имеющей в точке a предел, равный

$$b, \text{ т. е. } \lim_{x \to a} f(x) = b.$$

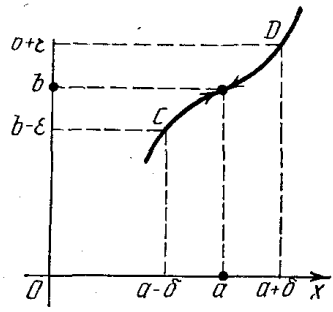


Рис. 62

Геометрически это означает следующее. Выберем произвольную ε-окрестность точки b, т. е. отрезок $[b-\varepsilon;\ b+\varepsilon]$ на оси Oy, и выполним следующее построение. Проведем из точек $b-\varepsilon$ и $b+\varepsilon$ прямые, параллельные оси Ox, которые пересекут график в точках C и D соответственно. Обозначим через C_1 и D_1 соответственно абсциссы точек C и D.

Наименьшее из расстояний этих точек от точки a примем за δ. Теперь, если возьмем любое значение x, такое, что

$$x \in [a - \delta;\ a + \delta],$$

и найдем соответствующее значение $f(x)$, то обнаружим, что

$$f(x) \in [b - \varepsilon;\ b + \varepsilon].$$

Геометрическая картина способствует лучшему пониманию приведенного определения.

Целесообразно, разумеется, рассмотреть и пример функции, неопределенной в точке a, но имеющей предел в этой точке (такие примеры имеются в различных учебниках).

4. Непрерывность функции

4.1. Интуитивное понятие о непрерывности функции можно получить, с одной стороны, наблюдая графики функций, обладающих и не обладающих этим свойством, с другой — исходя из задачи вычисления приближенного значения функции по заданному приближенному значению аргумента.

Сопоставляя, например, графики функций

$$f_1(x) = x^2,\ x \in R \text{ и } f_2(x) = \frac{1}{x^2},\ x \in R \setminus \{0\},$$

замечаем, что график f_1 представляет собой «сплошную», «непрерывную» линию, которую можно провести, не отрывая карандаш от бумаги (или мел от доски), а график функции f_2 имеет «разрыв», не позволяющий осуществить

это. Двигаясь по линии графика слева направо, приходится «перепрыгнуть», оторвать карандаш от бумаги.

Целесообразно рассмотреть и другие примеры подобных графиков с другими типами разрывов, например график функции

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0\end{cases} \quad \text{или} \quad f(x)=\begin{cases}x^2+1, & \text{если } x\geqslant 0,\\ x, & \text{если } x<0.\end{cases}$$

4.2. Подход к понятию непрерывности с точки зрения приближенных вычислений хорошо реализован в учебном пособии Н. Я. Виленкина, С. И. Шварцбурда «Математический анализ» (М., 1969) для IX—X классов средних школ с математической специализацией.

Практическая задача измерения площади квадрата сводится к определению его стороны и возведению полученного числа во вторую степень. Однако при измерении неизбежна погрешность. Вычисляя сторону квадрата с различной точностью, получаем и площадь квадрата с различной точностью. При этом обнаруживается, что с уменьшением погрешности при измерении стороны уменьшается и погрешность при вычислении площади.

После нескольких конкретных вычислений с различной точностью становится интуитивно ясно, что мы можем определить площадь квадрата со сколь угодно малой погрешностью (со сколь угодно высокой точностью), если измерим его сторону с достаточно малой погрешностью (с достаточно высокой точностью).

Объясняется это явление следующим. По существу мы решали задачу вычисления приближенного значения функции $y=x^2$ по заданному приближенному значению аргумента и обнаружили, что при малой погрешности в измерении значения аргумента (при малом изменении или приращении x) получается и малая погрешность в измерении значения функции (малое приращение y). Свойство, состоящее в том, что малое приращение аргумента влечет за собой и малое приращение функции, и есть свойство *непрерывности* функции, выражающееся наглядно в непрерывности (отсутствии разрывов) ее графика.

Данное здесь разъяснение непрерывности, разумеется, не является определением математического понятия непрерывности функции. В нем содержатся такие выражения, как «малое приращение», не имеющее точного смысла. Однако еще раз подчеркнем, что без такого «неточного» описания

интуитивного понятия непрерывности нельзя формировать соответствующее точное математическое понятие.

4.3. Приступим теперь к математизации интуитивного понятия непрерывности функции, т. е. к выяснению (или приданию) точного смысла предложения «функция f непрерывна в точке x_0 (или при $x=x_0$)».

Мы уже установили (на интуитивном уровне), что это означает: погрешность при вычислении $f(x_0)$ может быть сделана сколь угодно малой, если с достаточной точностью измерить значение x_0.

Если значение x_0 измерено с точностью δ, то это означает, что полученное приближенное значение x отличается от точного значения x_0 (в одну или другую сторону) меньше, чем на δ, т. е. что $|x-x_0|<\delta$ (именно потому, что приближенное значение x может оказаться меньшим или большим точного значения x_0, берется абсолютная величина разности $x-x_0$), при этом точность измерения всегда положительна: $\delta>0$.

Выражение «погрешность при вычислении $f(x_0)$ может быть сделана сколь угодно малой» означает, что какая бы точность $\varepsilon>0$ ни была задана, всегда можно добиться того, чтобы $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. Выражение же «всегда можно добиться того, чтобы $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$» имеет такой точный смысл: «всегда можно найти такое $\delta>0$, что если $|x-x_0|<\delta$, то $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$».

В результате такого перевода неточных выражений в точные получаем следующее определение:

функция f непрерывна в точке x_0, если, во-первых, она определена в точке x_0, во-вторых, для любого $\varepsilon>0$ можно найти такое $\delta>0$, что для всякого x (из области определения f), если $|x-x_0|<\delta$, то $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, т. е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\,(|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$.

4.4. Важно выяснить связь между непрерывностью и пределом функции в точке.

Сопоставляя определения непрерывности и предела функции в точке (3.3), легко выявляем, что непрерывность функции в точке включает существование предела функции в этой точке и равенство предела значению функции в этой точке. В последнем имплицитно выражено и условие принадлежности этой точки области определения функции (что необязательно для существования предела).

Таким образом, предложение

$$\text{«}f\text{ непрерывна в точке }x_0\text{»} \qquad (1)$$

эквивалентно следующей конъюнкции из трех предложений:

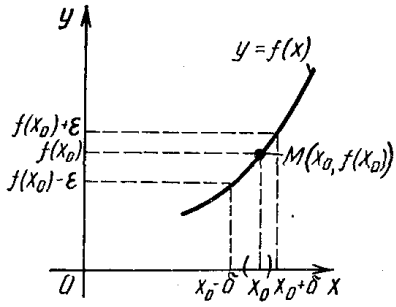


Рис. 63

«f определена в точке x_0» **и** «существует предел f в точке x_0» **и** «$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$»

Отсюда отрицание предложения (1), т. е. предложение «f не является непрерывной в точке x_0» означает «f неопределена в точке x_0» **или** «не существует предел f в точке x_0» **или** «$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$».

Мы получили полное разнообразие контрпримеров для понятия функции, непрерывной в точке.

4.5. Полученному определению непрерывности функции в точке соответствует геометрическая интерпретация (рис. 63): если выбрать произвольную ε-окрестность точки $f(x_0)$ на оси ординат, то найдется на оси абсцисс δ-окрестность точки x_0 со следующим свойством: какую бы точку x в этой окрестности мы ни взяли, соответствующая ей точка $f(x)$ на оси ординат попадет в выбранную ε-окрестность точки $f(x_0)$.

22. ПРОИЗВОДНАЯ

1. Содержание

1.1. В программу 1981 г. (базисную) в тему «Производная и ее приложения» включены такие вопросы: производная; геометрический и механический смысл производной; касательная к графику функции; производные суммы, произведения, частного; таблица производных элементарных функций; признаки возрастания и убывания функций; применение производных к нахождению экстремумов функций; построение графиков функций и решение задач на максимум и минимум с помощью производных.

1.2. Программные требования к подготовке учащихся в области начал анализа сформулированы следующим образом: ознакомиться с основными понятиями, результатами и методами математического анализа в объеме, позволяющем исследовать элементарные функции и решать простейшие геометрические, физические и другие прикладные задачи.

1.3. Для достижения указанных целей программа 1981 г. рекомендует при изучении элементов математического анализа выделять в первую очередь не технический и не формальный, а содержательный аспект изучения, имея

в виду прежде всего понимание учащимися геометрического и физического смысла таких понятий, как производная и интеграл, а также понимание принципиальной возможности применения методов дифференциального и интегрального исчисления для решения большого класса важных прикладных задач.

2. Понятие производной

2.1. Общеизвестный и широко распространенный подход к введению понятия производной (используемый в вузовском курсе) состоит в следующем.

Рассматриваются две конкретные задачи: 1) физическая — о нахождении скорости движущегося тела (например, свободно падающего) в данный момент t; 2) геометрическая — о построении касательной к кривой (представляющей собой график данной функции, например, $y=x^2$) в заданной на ней точке.

Обнаруживается, что решение этих задач, различных по содержанию, сводится к одним и тем же операциям, которые можно описать в общем виде так: имеется некоторая функция, выражаемая уравнением $y=f(x)$ (в задаче 1 это уравнение выражает путь как функцию от времени, в задаче 2 оно определяет кривую как график функции f).

При решении обеих задач мы выполняем следующие операции.

1. От данного значения аргумента x (начала рассматриваемого промежутка времени — в задаче 1; абсциссы заданной точки M кривой — в задаче 2) переходим к новому значению $x_1=x+\Delta x$, также принадлежащему области определения функции f (даем аргументу x некоторое приращение Δx), и находим новое значение функции

$$y_1=y+\Delta y=f(x+\Delta x)$$

(путь, пройденный падающим телом в конце рассматриваемого промежутка времени,— в задаче 1; ординату новой точки P кривой — в задаче 2).

2. Находим приращение функции $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ (путь, пройденный падающим телом за рассматриваемый промежуток времени,— в задаче 1; разность ординат точек M и P — в задаче 2).

3. Определяем отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

(среднюю скорость падающего тела за промежуток времени Δx — в задаче 1; угловой коэффициент секущей MP — в задаче 2).

4. Отыскиваем предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (мгновенную скорость падающего тела в момент x — в задаче 1; угловой коэффициент касательной к кривой в точке M — в задаче 2).

Последовательность операций 1—4 рассматривается как одна сложная операция и называется *дифференцированием* функции f. Результатом дифференцирования, если фиксируется определенное значение аргумента x, является определенное число. Различным значениям аргумента соответствуют в качестве результатов дифференцирования, вообще говоря, различные числа (различные скорости движения тела в различные моменты времени, различные угловые коэффициенты касательных в различных точках кривой).

Таким образом, в результате дифференцирования функции получается снова некоторая функция того же аргумента x. Эта новая функция обозначается через f' и называется *производной функцией* или просто *производной* данной функции f. Мы приходим к известному определению производной данной функции как предела отношения приращения этой функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю.

2.2. Описанный подход к введению понятия производной может (разумеется, после тщательной дидактической обработки, включающей подбор необходимых конкретных задач и доступное изложение их решения) быть приспособлен к школьному преподаванию. Но, очевидно, можно и отступить частично от этого подхода с целью получения лучшего методического решения. В частности, можно отказаться от рассмотрения с самого начала обеих задач 1 и 2. В таком случае исходят из одной задачи, на базе которой вводится понятие производной, а затем рассматривается и вторая задача. Хотя обе задачи важны в приложениях, при введении понятия производной следует отдать предпочтение физической задаче, т. е. задаче 1. При этом от скорости движения, т. е. от скорости изменения пути по времени, необходимо перейти к скорости изменения значения функции по значению аргумента, отвлекаясь от какой-либо конкретной интерпретации этих значений. Такое абстрагирование необходимо для того, чтобы перенести понимание производной как скорости в другие конкретные ситуации, где значе-

ние функции интерпретируется как плотность неоднородного вещества, теплоемкость тела при данной температуре и т. п.

Геометрическая задача (задача 2) может быть поставлена после введения понятия производной как задача о геометрическом изображении скорости изменения значения функции в данной точке. Рассматривая график функции, мы можем легко найти геометрическую величину, характеризующую эту скорость.

Действительно, средняя скорость изменения значения функции, когда аргумент меняет свое значение от x до $x+\Delta x$, т. е.

$$\Delta y/\Delta x = \operatorname{tg}\varphi,$$

где φ — угол наклона секущей MP к положительному направлению оси Ox (рис. 64).

Чтобы Δx стремилось к нулю, достаточно перемещать точку P по кривой в направлении совпадения с точкой M. Предельное положение секущей MP, когда точка P, перемещаясь по кривой, неограниченно приближается к точке M, называется касательной к кривой в точке M. В результате получаем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha,$$

где α — угол наклона касательной к графику функции f в точке M с положительным направлением оси абсцисс.

При таком подходе подчеркивается основной смысл производной как скорости изменения значения функции.

2.3. Так как производная определяется как предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю, необходимо подчеркнуть, что это отношение является функцией от приращения аргумента (Δx), так как значение x считается фиксированным.

Нецелесообразно заниматься в школьном обучении различными «патологическими» случаями, нежелательно сопровождать наши рассуждения оговорками о существовании

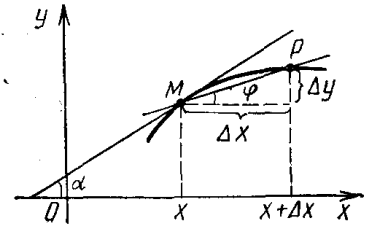


Рис. 64

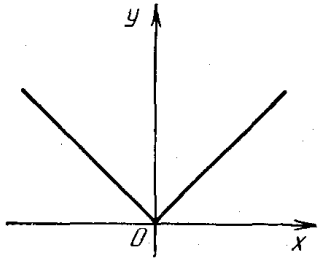


Рис. 65

производной. Но и умалчивать о том, что функция может не иметь производной в какой-то точке, тоже вряд ли педагогично.

Можно привести в качестве примера функцию $y=|x|$, которая при $x=0$ не имеет производной, хотя и непрерывна в этой точке (приращение функции стремится к нулю одновременно с приращением аргумента (при $x=0$), но отношение приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю, не имеет предела). График этой функции (рис. 65) не имеет касательной в начале координат.

После такого замечания уместно сообщить учащимся, что все функции, которые будут рассматриваться дальше, имеют производные при всех (допустимых) значениях аргумента.

2.4. Одним из важнейших моментов в изучении производной является установление связи между знаком производной и поведением функции (условий возрастания и убывания функции, наличия максимума и минимума). Наглядная иллюстрация этой связи с помощью геометрического изображения вполне достаточна и убедительна (вряд ли мы должны стремиться здесь к логическому доказательству).

Если угловой коэффициент касательной в некоторой точке графика функции положителен (производная при значении аргумента x, равном абсциссе этой точке графика, положительна), то касательная наклонена к положительному направлению оси абсцисс под острым углом, т. е. направлена *вверх* (точка, движущаяся по ней слева направо, поднимается при этом вверх). Если же угловой коэффициент касательной в некоторой точке графика отрицателен (производная при соответствующем значении аргумента x отрицательна), то касательная наклонена к положительному направлению оси абсцисс под тупым углом ($90°<\alpha<180°$), т. е. направлена вниз (точка, движущаяся по ней слева направо, опускается при этом вниз).

Исходя из этих наглядных представлений, легко устанавливаются следующие положения:

1) если производная положительна для всех значений аргумента $x \in]a, b[$, то все касательные к графику функции на этом отрезке направлены вверх, а следовательно, и сама кривая $y=f(x)$ направлена вверх, т. е. функция f возрастает при $a<x<b$ (рис. 66, *а*);

2) если производная отрицательна для всех значений аргумента $x \in]a, b[$, то все касательные к графику функции на этом отрезке направлены вниз, а следовательно, и сама

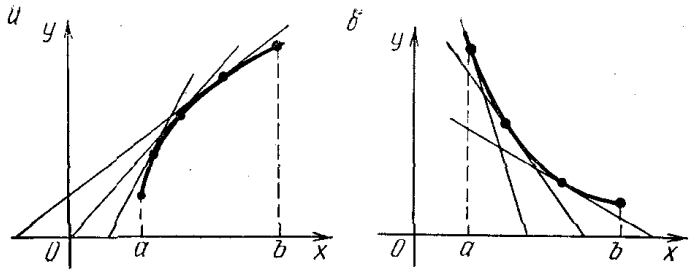


Рис. 66

кривая $y=f(x)$ направлена вниз, т. е. функция f убывает при $a<x<b$ (рис. 66, *б*);

3) если производная равна нулю при некотором значении x_0 аргумента, то касательная к графику функции в точке с абсциссой x_0 параллельна оси абсцисс, при этом возможны такие случаи:

а) «левее» x_0 (на некотором интервале $]a, x_0[$, т. е. для значений аргумента $x \in]a, x_0[$) производная положительна, т. е. функция возрастает, а «правее» x_0 (на некотором интервале $]x_0, b[$, т. е. для значений аргумента $x \in]x_0, b[$) производная отрицательна, т. е. функция убывает; в этом случае в точке x_0 функция «переходит» от возрастания к убыванию, т. е. имеет в точке x_0 максимум (предполагается, что такое интуитивное понятие максимума и минимума у учащихся уже имеется, рис. 67, *а*);

б) «левее» точки x_0 производная отрицательна, т. е.

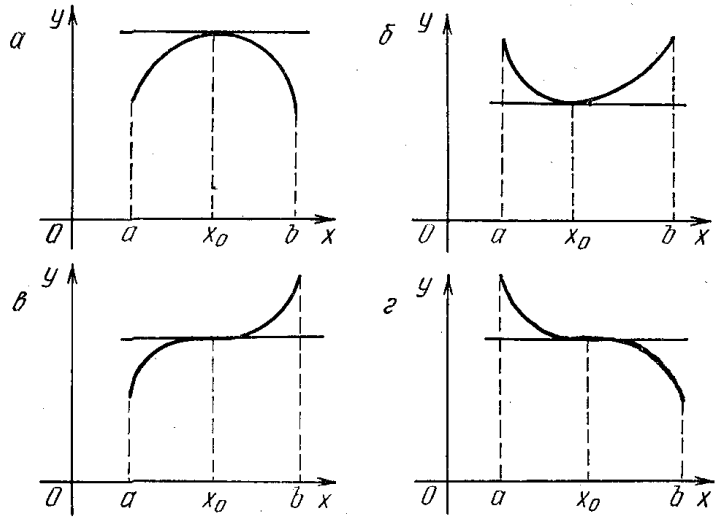


Рис. 67

функция убывает, а «правее» x_0 производная положительна, т. е. функция возрастает (рис. 67, *б*); в этом случае в точке x_0 функция «переходит» от убывания к возрастанию, т. е. имеет в точке x_0 минимум;

в) «левее» и «правее» x_0 производная имеет один и тот же знак, т. е. функция возрастает «левее» и «правее» x_0 или убывает (рис. 67, *в, г*) и не имеет в x_0 ни максимума, ни минимума.

3. Применение производной

3.1. Введение понятия производной в школьное обучение оправдано лишь в том случае, если это понятие получит хорошую «нагрузку», причем не только в курсе математики, но и физики. Наша цель — показать учащимся действительные приложения производной — одного из основных понятий математического анализа.

Основным назначением производной в курсе математики является ее использование при исследовании функций. К этому же сводится в конечном итоге применение производной к решению некоторых типов содержательных задач (применение производной к приближенному решению уравнений — метод касательных, метод итераций — может быть темой для факультативных занятий).

3.2. Прежде всего необходимо исследовать с помощью производной квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$

Рассмотрим два случая.

1. Функция определена на всем множестве R вещественных чисел.

2. Производная функция $y' = 2ax + b$. Производная $y' = 0$ при $x = -\frac{b}{2a}$. Для дальнейшего исследования функции рассмотрим отдельно случаи, когда $a > 0$ и $a < 0$.

При $a > 0$: y' как линейная функция возрастает, поэтому левее $x = -\frac{b}{2a}$, где она равна нулю, т. е. для $x < -\frac{b}{2a}$, $y' < 0$, а правее $x = -\frac{b}{2a}$, т. е. для $x > -\frac{b}{2a}$, $y' > 0$. Следовательно, функция $y = ax^2 + bx + c$ в точке $x = -\frac{b}{2a}$ переходит от убывания к возрастанию, т. е. в этой точке функция имеет минимум, равный

$$a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+b\left(-\frac{b}{2a}\right)+c=\frac{4ac-b^2}{4a}=-\frac{D}{4a}$$

(D — дискриминант).

Результат этого исследования можно записать в следующей таблице:

	$y=ax^2+bx+c\ (a>0)$			
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
y'	$-\ -\ -\ -\ -\ -$	0	$+\ +\ +\ +\ +\ +$	
y	$+\infty$ ↘	$y_{min}=-\frac{D}{4a}$	↗	$+\infty$

Как видно, $y_{\min}$ является и наименьшим значением функции на всей области определения, т. е. $y\geqslant-\frac{D}{4a}$ (мы нашли и область значений функции). Аналогично проводится исследование и при $a<0$.

Для построения параболы, кроме координат вершины $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$, изображающей минимум (при $a>0$) или максимум (при $a<0$) функции, обычно находят и точки пересечения параболы с осью абсцисс (нули функции) (рис. 68).

3.3. Исследование квадратичной функции можно провести и элементарными средствами. С помощью производной необходимо исследовать и такие функции, поведение которых уже нельзя описать элементарными средствами.

Рассмотрим, например, функцию $y=3x^4-4x^3-12x^2+2$. Учащимся ясно, что элементарные средства недостаточны для исследования этой функции и построения (хотя бы при-

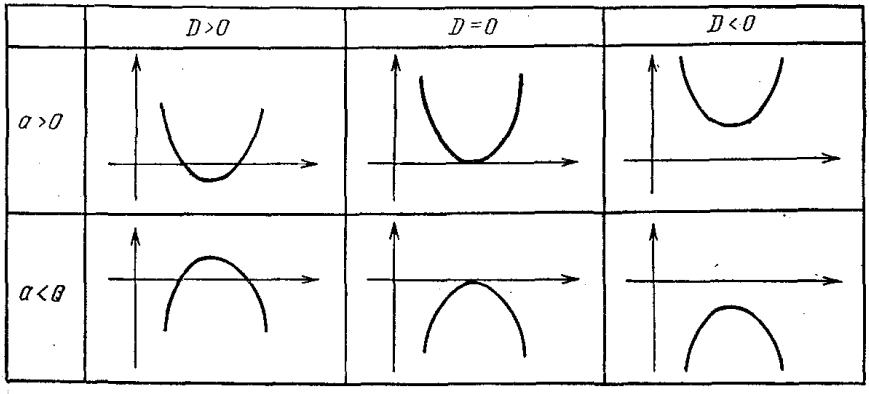


Рис. 68

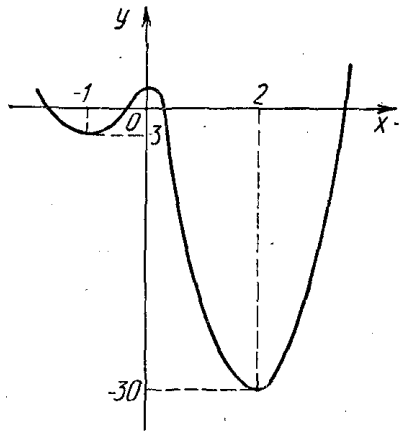


Рис. 69

ближенного) ее графика. С бо́льшим интересом они исследуют такие функции с помощью производной.

Исследование проводится по следующей общей схеме:

1) находится производная: $y' = 12x^3 - 12x^2 - 24x$;

2) производная приравнивается нулю, и решается полученное уравнение: $x^3 - x^2 - 2x = 0$; $x_1 = -1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 2$;

3) определение промежутков знакопостоянства производной, а следовательно, промежутков монотонности функции и наличия максимумов и минимумов последней осуществляется постепенным заполнением следующей таблицы:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		
y	$+\infty$	↘	-3 min	↗	2 max	↘	-30 min	↗	$+\infty$

4) на основании проведенного исследования дается весьма приближенное изображение графика функции (рис. 69).

3.4. Среди задач, решаемых с помощью производной, можно выделить два класса задач, которые, очевидно, наиболее подходят для школьного обучения: 1) задачи физического содержания, в которых производная используется непосредственно как скорость или ускорение («скорость изменения скорости»); 2) задачи на отыскание наибольшего или наименьшего значения функции.

Остановимся кратко на задачах второго типа. По существу с подобными задачами мы встречаемся в различных областях практической деятельности, когда возникает вопрос, как поступить, чтобы имеющимися средствами получить наибольший эффект с наименьшей затратой средств.

Приступая к решению подобных задач, необходимо отчетливо различать понятия максимума и наибольшего значения, минимума и наименьшего значения функции. Для этого целесообразно уточнить интуитивные понятия максимума и минимума и сравнить их точные математические

описания (определения) с описаниями наибольших и наименьших значений:

$$f(x_0) = y_{\max} \Leftrightarrow \exists\delta > 0\, \forall x\, (|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < f(x_0));$$

$f(x_0)$ — наибольшее значение функции на отрезке $[a, b]$, если и только если

$$\forall x\, (x \in [a, b] \Rightarrow f(x) < f(x_0)).$$

Аналогично

$$f(x) = y_{\min} \Leftrightarrow \exists\delta > 0\, \forall x\, (|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > f(x_0));$$

$f(x_0)$ — наименьшее значение функции на отрезке $[a, b]$, если и только если

$$\forall x\, (x \in [a, b] \Rightarrow f(x) > f(x_0)).$$

Сравнение этих записей показывает, что максимальное (минимальное) значение функции является лишь «локально наибольшим (наименьшим) значением», т. е. наибольшим (наименьшим) среди «соседних» значений или на некоторой окрестности x_0.

Наглядные представления, развиваемые с помощью графиков различных функций, подсказывают, что наибольшее (наименьшее) значение функции на некотором отрезке достигается либо в одной из точек максимума (минимума), либо в одном из концов этого отрезка. В последнем случае решение практической задачи на нахождение наибольшего или наименьшего значения функции не требует применения производной. Если же наибольшее (наименьшее) значение функции достигается в одной из точек максимума (минимума), то решение задачи сводится к исследованию некоторой функции на максимум (минимум). Методика решения подобных задач достаточно освещена в литературе.

23. ИНТЕГРАЛ

1. Содержание

1.1. Программа 1981 г. (базисная) предусматривает следующее содержание темы «Интеграл и его приложения»: первообразная (неопределенный интеграл); таблица интегралов элементарных функций (степенной, показательной, синуса, косинуса); простейшие случаи нахождения неопределенных интегралов; площадь криволинейной трапеции; определенный интеграл как предел интегральных сумм;

формула Ньютона — Лейбница; применение интеграла к решению простейших геометрических и физических задач; примеры дифференциальных уравнений.

1.2. Рекомендации к изучению начал математического анализа (см. гл. 22; 1.3) относятся, разумеется, и к изучению интеграла в школе.

2. Введение понятия интеграла

2.1. С дидактической точки зрения представляется целесообразным одновременное рассмотрение взаимообратных операций дифференцирования и интегрирования, одновременное решение взаимообратных задач определения производной данной функции и функции, имеющей данную производную. И в том случае, когда понятие первообразной функции и понятие неопределенного интеграла как совокупности первообразных, имеющих данную производную, в явном виде вводятся позже в связи с изучением производной, целесообразно в достаточно простых случаях решать и обратную задачу пока без применения специальной терминологии и символики. Это послужит пропедевтикой для введения понятия интеграла в явном виде. Так, после ознакомления с производной многочлена учащиеся могут не только отыскивать производную по заданному многочлену, но и по производной находить функцию. При этом сразу обнаруживается неоднозначность решения обратной задачи: например, функции x^3; x^3+1; $x^3-4{,}5$ имеют одну и ту же производную $3x^2$. Обобщая эти результаты, приходим к выводу, что каждая из функций x^3+C, где C — произвольная постоянная, имеет производную $3x^2$.

Обратные задачи можно решать и в конкретной интерпретации. Например, возьмем такую задачу: «Найти путь как функцию времени, если известно, что скорость как функция времени выражается с помощью уравнения $v=2t+1$ и что путь, пройденный за 10 с, $s(10)=120$ м».

Нахождение пути по данной скорости означает определение функции по данной производной. Каждая из функций $s=t^2+t+C$, где C — произвольная постоянная, имеет производную $2t+1$. Условиям задачи удовлетворяет лишь одна из этих функций, принимающая значение 120 при $t=10$. Исходя из этого условия, находим $C=10$ и $s=t^2+t+10$.

После решения подобных задач введение понятия неопределенного интеграла по существу сводится к введению соответствующего термина и символа.

2.2. Мы уже показали (см. гл. 9), что изображение функций с помощью площадей приводит к необходимости определения площади «криволинейной трапеции», т. е. является стимулом для введения понятия определенного интеграла. Рассмотрим в качестве примера задачу на вычисление площади, ограниченной параболой $y=x^2+3$, положительной полуосью Ox и прямыми $x=0$ (осью ординат) и $x=a$ (рис. 70).

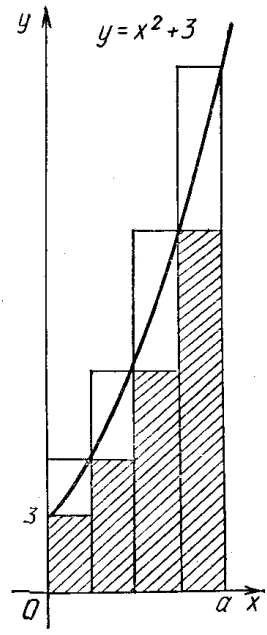


Рис. 70

Собственно говоря, описываемая процедура служит для определения самого понятия площади под кривой. Мы же считаем это понятие интуитивно ясным и используем эту процедуру для вычисления площади.

Делим отрезок Oa на n равных частей. Через точки деления проводим перпендикуляры к оси абсцисс до пересечения с кривой. На каждом отрезке разбиения Oa строим два прямоугольника: высота одного равна ординате левого конца отрезка, другого — ординате правого конца. Получаем две ступенчатые фигуры, одна из которых включена в фигуру, ограниченную параболой, другая полностью включает ее. Таким образом, искомая площадь заключена между площадями двух ступенчатых фигур. Вычислим эти площади.

Прежде всего определим ординаты, соответствующие точкам разбиения Oa:

x	0	$\frac{a}{n}$	$\frac{2a}{n}$	...	$\frac{ka}{n}$	...	$\frac{(n-1)a}{n}$	$\frac{na}{n}=a$
y	3	$\left(\frac{a}{n}\right)^2+3$	$2^2\left(\frac{a}{n}\right)^2+3$	...	$k^2\left(\frac{a}{n}\right)^2+3$	...	$(n-1)^2\left(\frac{a}{n}\right)^2+3$	$n^2\left(\frac{a}{n}\right)^2+3$

«Нижняя сумма» площадей прямоугольников (с меньшими высотами, соответствующими левым концам отрезков разбиения Oa):

$$S_н=\frac{a}{n}3+\frac{a}{n}\left[\left(\frac{a}{n}\right)^2+3\right]+\ \dots\ +\frac{a}{n}\left[k^2\left(\frac{a}{n}\right)^2+3\right]+\dots+$$
$$+\frac{a}{n}\left[(n-1)^2\left(\frac{a}{n}\right)^2+3\right]=3n\frac{a}{n}+\frac{a^3}{n^3}[1^2+2^2+\ \dots\ +$$
$$+k^2+\ \dots\ +(n-1)^2].$$

Так как $\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1)$, получаем

$$S_н = 3a + \frac{a^3}{6} \frac{n(n-1)(2n-1)}{n^3} = 3a + \frac{a^3}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right).$$

«Верхняя сумма» площадей прямоугольников (с большими высотами, соответствующими правым концам отрезков разбиения Oa):

$$S_в = \frac{a}{n}\left[\left(\frac{a}{n}\right)^2 + 3\right] + \frac{a}{n}\left[2^2\left(\frac{a}{n}\right)^2 + 3\right] + \ldots + \frac{a}{n}\left[k^2 \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{a}{n}\right)^2 + 3\right] + \ldots + \frac{a}{n}\left[n^2\left(\frac{a}{n}\right)^2 + 3\right] = 3n\frac{a}{n} + \frac{a^3}{n^3}(1^2 +$$

$$+ 2^2 + \ldots + k^2 + \ldots + n^2).$$

Так как $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$, получаем

$$S_в = 3a + \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} = 3a + \frac{a^3}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

При неограниченном увеличении числа n частей разбиения Oa:

$$\lim_{n\to\infty} S_н = \lim_{n\to\infty} S_в = 3a + \frac{a^3}{6} 2 = 3a + \frac{a^3}{3}.$$

Этот предел и принимается за площадь, ограниченную параболой $y = x^2 + 3$, положительной полуосью Ox и прямыми $x = 0$ и $x = a$.

Чтобы внушить учащимся «доверие» к описанной процедуре, можно ее применить к определению площади, ограниченной прямой $y = mx + b$, положительной полуосью Ox и прямыми $x = 0$ и $x = a$. Приходим к тому же результату, что и при вычислении площади прямоугольной трапеции известным способом $\left(ab + m\frac{a^2}{2}\right)$. При $m = 0$ получаем площадь прямоугольника (ab), при $b = 0$ — площадь треугольника $\left(\frac{ma^2}{2}\right)$.

2.3. Описанную процедуру можно обобщить на случай площади, ограниченной графиком любой непрерывной положительной функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$. Тогда в качестве высот прямоугольников берем не значения функции в левых и правых концах отрезков

разбиения, а соответственно наименьшее и наибольшее значения функции на каждом из этих отрезков. Обозначив длину отрезка разбиения $(b-a)/n$ через Δx, получим

$$S_{\text{н}} = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x \quad \text{и} \quad S_{\text{в}} = \sum_{k=1}^{n} M^k \Delta x,$$

где m_k — наименьшие значения функции на отрезках разбиения; M_k — наибольшие.

Искомая площадь, очевидно, должна быть заключена между $S_{\text{н}}$ и $S_{\text{в}}$.

При неограниченном возрастании n $\Delta x \to 0$. Если при этом $S_{\text{н}}$ и $S_{\text{в}}$ стремятся к одному и тому же пределу (см. (1.3)), т. е.

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x,$$

то этот общий предел принимается за площадь, ограниченную графиком функции $f(x)$, и называется *определенным интегралом* этой функции от a до b (между «границами» a и b), что обозначается следующим образом:

$$S = \int_a^b f(x)\, dx.$$

2.4. Естественно, возникает вопрос, нельзя ли более простым способом вычислить площадь под графиком функции, т. е. определенный интеграл. К такому способу мы придем, устанавливая связь между функцией, изображенной графиком, и функцией, изображенной площадью под графиком.

Рассмотрим площадь, ограниченную графиком функции $y=f(t)$ (непрерывной и положительной на $[a, b]$), осью абсцисс, прямой, перпендикулярной к оси абсцисс в точке a, и прямой, перпендикулярной к оси абсцисс в точке с переменной абсциссой x (рис. 71) (чтобы буква x не фигурировала в двух различных смыслах, аргумент в функции f мы обозначили буквой t).

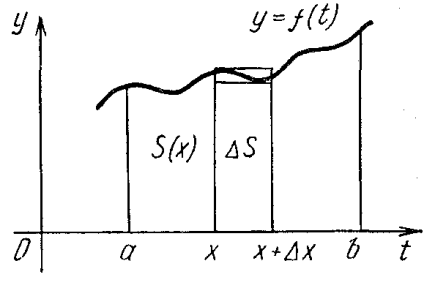


Рис. 71

Очевидно, что эта площадь — функция переменной абсциссы x. Обозначим значение этой функции через $S(x)$.

Дадим x некоторое положительное приращение Δx так, чтобы $x+\Delta x<b$. Соответствующее приращение функции S обозначим ΔS. Площадь ΔS заключена между площадями двух прямоугольников с основаниями Δx и высотами, равными соответственно m и M, наименьшему и наибольшему значениям функции f на отрезке Δx:

$$m\Delta x \leqslant \Delta S \leqslant M\Delta x \text{ или } m \leqslant \frac{\Delta S}{\Delta x} \leqslant M.$$

Когда $\Delta x \to 0$, то m и M стремятся к $f(x)$ (к значению функции f в точке x при значении аргумента $t=x$). Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x}$, т. е. $S'(x)=f(x)$. Мы получили, что f — производная функции S. Следовательно, S — одна из первообразных.

Если $\{F(x)+C\}$ — совокупность первообразных для f, то S — та из первообразных, которая при $x=a$ принимает значение 0, т. е. $S(a)=0$. Следовательно, $F(a)+C=0$, откуда $C=-F(a)$ и $S(x)=F(x)-F(a)$ или

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a),$$

а для $x=b$

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Возвращаясь к решенной задаче (см. (2.2)), получаем запись ее решения в одной строке:

$$\int_0^a (x^2+3)\,dx = \left(\frac{x^3}{3}+3x\right)\Bigg|_0^a = \frac{a^3}{3}+3a.$$

2.5. Необходимо подчеркнуть, что в нашем рассмотрении (см. 2.2—2.4) мы только «показываем», но не доказываем. В нем также опущено много деталей. Это лишь «набросок» одного из возможных вариантов изложения соответствующих вопросов.

3. Применение интеграла

3.1. Изучение интеграла было бы педагогически неоправданным, если не показать его применение.

Так как при введении понятия интеграла мы исходили

из его геометрической интерпретации в виде площади, естественно показать его использование в геометрии для вычисления объемов и площадей поверхностей тел (например, призмы, цилиндра, пирамиды, конуса, усеченного конуса, шарового сегмента, шара). В результате применения интеграла значительно упрощается этот раздел стереометрии.

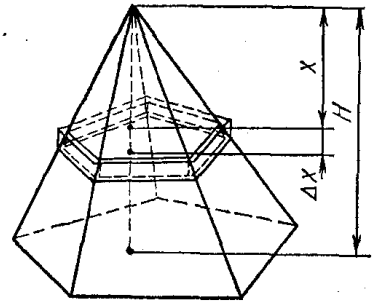


Рис. 72

Программа 1981 г. (базисная) предусматривает также представление о простейших дифференциальных уравнениях, описывающих разнообразные реальные процессы, и об их решении как о наиболее важном применении интегрального исчисления. Ниже (см. 3.3) мы рассмотрим вопрос об ознакомлении учащихся X класса с составлением простейших дифференциальных уравнений из условий конкретных задач и с их решением.

3.2. Пусть дана пирамида с высотой H и площадью основания S (рис. 72).

Проведем плоскость, параллельную основанию, на расстоянии x от вершины $(0<x<H)$. Обозначим площадь сечения через $S(x)$, а объем пирамиды, отсеченной от данной, через $V(x)$. На основании известной теоремы о параллельных сечениях в пирамиде находим, что $S(x)=(S/H^2)x^2$. Установим связь между функциями $V(x)$ и $S(x)$. С этой целью дадим x некоторое положительное приращение Δx. Тогда соответствующее приращение объема ΔV представляет собой объем усеченной пирамиды с высотой Δx, площадью верхнего основания $S(x)$ и нижнего — $S(x+\Delta x)$. Очевидно, что объем этой усеченной пирамиды заключен между объемами двух призм с высотами Δx и площадями оснований, равными соответственно $S(x)$ и $S(x+\Delta x)$, т. е.

$$S(x)\Delta x<\Delta V<S(x+\Delta x)\Delta x$$

или

$$S(x)<\frac{\Delta V}{\Delta x}<S(x+\Delta x).$$

Для пирамиды (а также для призмы, цилиндра, конуса, усеченного конуса, полушара) $S(x)$ — непрерывная функция и поэтому, если $\Delta x\to 0$, то $S(x+\Delta x)\to S(x)$ и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta x}=$

$= S(x)$. Но $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = V'$. Следовательно, $V' = S(x)$, и поэтому

$$V = \int_0^H S(x)dx. \qquad (1)$$

Для пирамиды $\frac{S(x)}{x^2} = \frac{S}{H^2}$, откуда $S(x) = \frac{Sx^2}{H^2}$, где S — площадь основания. Таким образом, $S(x)$ непрерывна и

$$V = \int_0^H \frac{S}{H^2} x^2 dx = \frac{S}{H^2} \int_0^H x^2 dx = \frac{S}{H^2} \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^H = \frac{S}{H^2} \frac{H^3}{3},$$

т. е. $V = \frac{1}{3} SH$.

Для призмы и цилиндра $S(x) = S$ (т. е. также непрерывна) и

$$V = \int_0^H S dx = Sx\Big|_0^H = SH.$$

Для полушара $S(x) = \pi r^2(x) = \pi x(2R - x)$, где $r(x)$ — радиус сечения $S(x)$. Таким образом, и для полушара $S(x)$ — непрерывная функция, и объем вычисляется по формуле (1):

$$V_1 = \int_0^R \pi x(2R - x)\, dx = \pi \left(\int_0^R 2Rx dx - \int_0^R x^2 dx \right) =$$

$$= \pi \left(2R \frac{x^2}{2}\Big|_0^R - \frac{x^3}{3}\Big|_0^R \right) = \pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{2\pi R^3}{3}.$$

Следовательно, объем шара $V = (4\pi R^3)3$.

3.3. Ознакомление учащихся с простейшими дифференциальными уравнениями не означает, что необходимо изучать какой-нибудь начальный фрагмент теории дифференциальных уравнений.

Рассматривая задачу, обратную дифференцированию (см. 3.2), мы по существу уже решали простейшие дифференциальные уравнения типа $s' = 2t + 1$ с начальными условиями, например $s(10) = 120$.

Очевидно, можно ограничиться разъяснением учащимся самого понятия дифференциального уравнения и решения простейших типов дифференциальных уравнений ($y' = f(x)$, $y'' = f(x)$), после чего необходимо рассмотреть несколько за-

дач различного конкретного содержания на составление дифференциальных уравнений.

Рассмотрим решение двух таких задач (важного прикладного значения).

Задача 1 (нахождение закона распада радия). Известно, что скорость распада радия пропорциональна наличному количеству вещества. Определить массу радия в любой момент времени t, т. е. закон распада $m=m(t)$, зная, что $m(0)=m_0$.

Решение. По условию задачи $m'=-km$ (скорость пропорциональна количеству вещества; знак $-$ характеризует убывание m). Полученное дифференциальное уравнение решается следующим образом:

$$\frac{1}{m}m'=-k;\ \int\frac{1}{m}m'dt=-k\int dt;\ \ln m=-kt+C.$$

Используя начальные условия $m(0)=m_0$, находим $\ln m_0=C$. Тогда $\ln m=\ln m_0-kt$, а следовательно, $m=m_0e^{-kt}$.

Для нахождения значения коэффициента k используем также известный период полураспада радия, равный 1550 годам.

Таким образом, $\frac{m_0}{2}=m_0e^{-1550k}$, или $e^{-1550k}=\frac{1}{2}$, или $-1550k=-\ln 2$, откуда $k=\frac{\ln 2}{1550}$.

Получаем $m=m_0e^{-\frac{\ln 2}{1550}t}=m_0(e^{\ln 2})^{-\frac{t}{1550}}=m_0\cdot 2^{-\frac{t}{1550}}$. Следовательно, закон распада радия описывается следующей формулой:

$$m=m_0\cdot 2^{-\frac{t}{1550}},$$

где t — время в годах.

Задача 2 (нахождение уравнения гармонических колебаний). Материальная точка массы m выходит из состояния покоя под действием силы, притягивающей ее к неподвижной точке O и изменяющейся пропорционально расстоянию x движущейся точки от неподвиж-

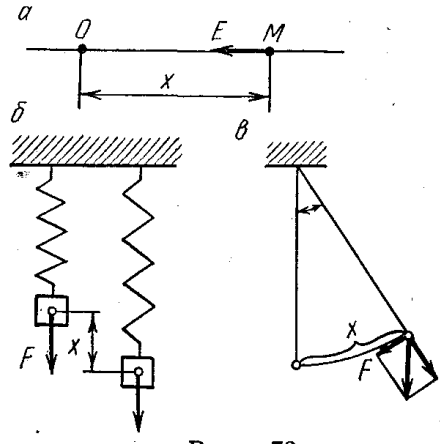


Рис. 73

ной (рис. 73, *а*). Найти уравнение движения (в качестве примера конкретного осуществления этих условий можно привести пружину (рис. 73, *б*) или маятник (рис. 73, *в*)).

Р е ш е н и е. Сила F равна произведению массы на ускорение, т. е. $F=mx''$. По условию задачи эта сила пропорциональна расстоянию x, т. е. $mx''=-Cx$ или $x''+\omega^2x=0$, где $\omega^2=C/m$.

Затем непосредственной проверкой устанавливается, что общее решение уравнения $x''+\omega^2x=0$ будет

$$x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t. \qquad (1)$$

Содержащиеся в уравнении (1) произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются из начальных условий. Если, например, $x(0)=a$, то, подставив эти значения в уравнение (1), получаем $C_1=a$.

Если, кроме того, начальная скорость $x'_{t=0}=v_0$, то, продифференцировав обе части уравнения (1)

$$x'=-C_1\omega\sin\omega t+C_2\omega\cos\omega t$$

и подставив $t=0$ и $x'=v_0$, находим $C_2=v_0/\omega$.

Таким образом, уравнение (1) принимает вид

$$x=a\cos\omega t+\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t.$$

Это решение можно записать так:

$$x=A\sin(\omega t+\varphi)$$

$\left(A=\sqrt{a^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}\right.$ — амплитуда колебания, $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{a\omega}{v_0}$ — начальная фаза).

Как видно, решение x — периодическая функция с периодом $T=\frac{2\pi}{\omega}$.

24. КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ

1. Математические методы в школьной геометрии (различные подходы)

1.1. В историческом плане в области построения школьной геометрии наблюдаются две тенденции.

1. Одна из них связана с многовековой традицией, идущей от «Начал» Евклида. Суть ее в том, что школьная геометрия строится по евклидово-гильбертовой системе без всякого привлечения математических идей и связанного с

ними аппарата, разработанного в других разделах математики (векторы, координаты, преобразования). Школьная геометрия развивалась исключительно собственными геометрическими средствами, что привело к традиционной изолированности геометрии от других разделов математики и явно противоречит идеи интеграции наук.

2. Начиная с 50-х гг. в связи с развитием движения за модернизацию математического образования наиболее сильной критике подвергалась традиционная система школьной геометрии. Делались попытки адаптации различных современных построений евклидовой геометрии (на базе теоретико-групповой идеи или на основе идеи векторного или метрического пространства) к построению школьного курса геометрии.

Так, в учебнике «Геометрия 6—8» (М., 1980) была введена разработанная академиком А. Н. Колмогоровым система геометрии, основанная на идее метрического пространства. В качестве одного из первоначальных понятий было принято понятие расстояния с соответствующей группой аксиом.

Преимущество современных построений состоит в их большей рациональности по сравнению с традиционными геометрическими средствами. По этому поводу Ж. Дьедонне в книге «Линейная алгебра и элементарная геометрия» утверждает, что «в результате работ Грассмана, Кэли и др. более чем столетней давности и в элементарной геометрии открылся, по образному выражению Г. Шоке, «королевский путь». Отправляясь от очень простых аксиом — в отличие от сложных аксиом Евклида — Гильберта — можно при помощи тривиальных вычислений непосредственно и в несколько строчек получить все то, для чего раньше нужно было возводить леса искусственных и сложных систем треугольников, чтобы во что бы то ни стало свести задачу к священным случаям «равенства» или «подобия» треугольников — к единственной основе всей традиционной техники Евклида» (М., 1972, с. 14).

Однако наряду с этим бесспорным преимуществом, «королевский путь» обладает и серьезным недостатком, так как превращает геометрию в линейную алгебру. Геометрия в таком построении перестает быть именно той геометрией, изучение которой способствует развитию пространственных представлений учащихся, т. е. достижению одной из целей изучения геометрии в школе.

1.2. Естественно возникла педагогическая проблема найти «школьный путь» в геометрии, который, по-видимо-

му, не должен придерживаться крайних концепций, т. е. строго следовать традиционной евклидово-гильбертовой системе или какой-нибудь современной тенденции. Необходимо попытаться сочетать различные системы таким образом, чтобы по возможности сохранить «геометричность» евклидово-гильбертовой системы, но при этом усилить ее действительно слабую технику аппаратом, использованным в современных построениях, в частности координатным и векторным методами.

Результатом поисков решения этой проблемы и было появление в начале 70-х гг. упомянутых учебников геометрии под редакцией А. Н. Колмогорова, а в начале 80-х гг. учебника «Геометрия» А. В. Погорелова и ряда экспериментальных учебников (В. Г. Болтянского и др.; Л. С. Атанасяна и др.; А. Д. Александрова и др.). Ни в одном из этих учебников геометрия не строится на векторной основе, но во всех используется векторная алгебра и метод координат.

1.3. Программа 1981 г. (базисная) выделяет координаты и векторы как объекты специального изучения. Уже в IV—V классах в разделе «Элементы геометрии» предусмотрено введение понятий прямоугольной системы координат на плоскости, абсциссы и ординаты точки.

В дальнейшем в планиметрии и в стереометрии выделяется тема «Координаты. Векторы». В VI—VIII классах эта тема включает такие разделы: прямоугольные координаты на плоскости; формула расстояния между двумя точками плоскости с заданными координатами; уравнения прямой и окружности. Далее предусмотрено изучение вопросов: вектор, длина и направление вектора; сложение векторов и его свойства; умножение вектора на число и его свойства; коллинеарные векторы; координаты вектора; скалярное умножение векторов и его свойства; угол между векторами; применение координат и векторов к доказательству теорем и решению задач.

В IX—X классах тема «Координаты. Векторы» имеет следующее содержание: прямоугольная система координат в пространстве; формула расстояния между двумя точками пространства с заданными координатами; уравнения плоскости и сферы; векторы в пространстве; сложение векторов и его свойства; координаты вектора; скалярное умножение векторов и его свойства; угол между векторами.

Как видно, программа включает достаточно широкий круг вопросов, обеспечивающих эффективное применение координатного и векторного методов как в геометрической

теории, так и при решении задач; предусматривается также сочетание двух методов.

1.4. Из неприемлемости векторного построения в обязательном школьном курсе геометрии не следует, однако, нецелесообразность ознакомления с этим построением на факультативных занятиях или в классах с углубленным изучением математики. Но и здесь это представляется целесообразным лишь как ознакомление учащихся еще с одним возможным построением геометрии, логически эквивалентным уже известному им. Учащиеся с интересом воспринимают различные построения: понятие вектора, которое ранее определялось, в новом построении становится первоначальным, неопределяемым, а те свойства операций над векторами, которые доказывались как теоремы, принимаются теперь без доказательства, как аксиомы, те же предложения, которые были приняты за аксиомы, доказываются как теоремы.

Ознакомление с двумя различными аксиоматическими построениями одной и той же геометрии способствует лучшему пониманию сущности аксиоматического метода.

2. Координатный метод

2.1. Подготовка к введению координатной системы на прямой и на плоскости может и должна вестись уже в начальных классах на доступном для детей этого возраста уровне с помощью специально составленных упражнений, задач, игр.

2.2. Хорошо разработано введение координат на плоскости в учебнике Н. Я. Виленкина и др. «Математика, 5 класс» (М., 1970). На этом этапе после ряда удачно подобранных примеров приходят к понятию координат точки. Здесь пока не вводят термины «абсцисса» и «ордината», ограничиваясь названиями «первая координата» и «вторая координата», и это, очевидно, разумно. Система упражнений рассчитана на приобретение учащимися навыка нахождения точки плоскости по заданным ее координатам и решения обратной задачи — нахождения координат данной точки.

2.3. При введении координат на плоскости целесообразно не сообщать учащимся сразу в готовом виде описание системы координат.

Используя метод проблемного изложения и исходя из уже известной системы координат на прямой, можно выдвинуть проблему конструирования системы координат на

плоскости. Отметим, что одного числа (одной координаты) для определения положения точки на плоскости уже недостаточно. Так, число x можно сопоставить не только точке A, лежащей на прямой (оси) Ox (рис. 74), но и каждой из точек B, C, D, B_1, C_1, D_1, ..., лежащих на перпендикуляре к Ox в точке A.

Рассмотрим, в чем различие в положениях этих точек, чем еще можно дополнить число x, чтобы точно определить положение каждой из этих точек.

Легко заметить, что эти точки находятся на различных расстояниях от Ox. Поэтому естественно дополнить координату x второй координатой y, такой, что y — расстояние точки от Ox, а знак положительный, если точка расположена в верхней полуплоскости относительно Ox, и отрицательный, если точка расположена в нижней полуплоскости.

Но этот же результат можно получить, очевидно, и другим путем. Если ввести еще одну прямую (ось) Oy, перпендикулярную к Ox, то вторая координата y определится опусканием перпендикуляра из данной точки на ось Oy.

После раскрытия генезиса координатной системы на плоскости можно перейти к ее описанию уже в готовом виде.

2.4. Метод проблемного изложения может быть использован и при введении декартовых координат в пространстве.

Исходя из уже известной координатной системы на плоскости, обнаруживаем, что двух чисел (координат) не-

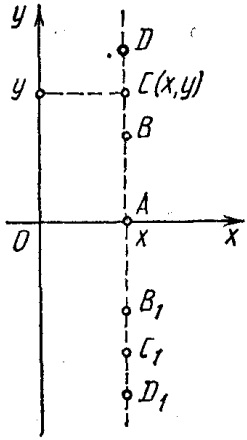


Рис. 74

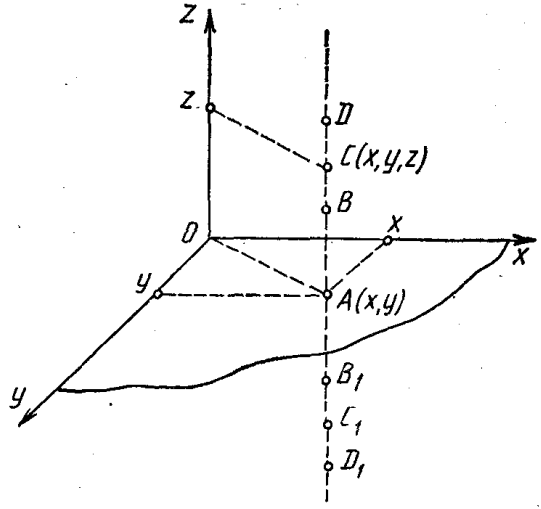


Рис. 75

достаточно для определения положения точки в пространстве. Так, паре чисел (x, y) в пространстве можно сопоставить не одну только точку A, расположенную в плоскости xOy (рис. 75), но и точки B, C, D, ..., принадлежащие прямой, перпендикулярной к плоскости xOy в точке A.

Возникает вопрос, чем еще надо дополнить пару координат (x, y), чтобы однозначно определить положение каждой из этих точек. Очевидно, третьей координатой z, такой, что $|z|$ — расстояние точки до плоскости xOy, а знак z положительный, если точка расположена в верхнем полупространстве относительно xOy, отрицательный, если точка расположена в нижнем полупространстве. Нетрудно заметить, что эту третью координату z можно получить (измерить) на третьей оси Oz, перпендикулярной к плоскости xOy. Таким образом мы приходим к построению декартовой системы координат в пространстве.

Другой методический вариант, использующий векторы, может найти применение при углубленном изучении математики.

3. Понятие вектора

3.1. Трактовка понятия вектора в школьном обучении носит дискуссионный характер.

В математике на вопрос, что такое вектор, есть один ответ — это элемент векторного пространства, а последнее определяется аксиоматически. В данном случае все ясно, поскольку отвлекаемся от природы векторов, если иметь в виду абстрактную, построенную вне всякой интерпретации теорию.

В школьном же обучении геометрии мы пользуемся какой-нибудь геометрической моделью векторного пространства, а стало быть, и самого вектора как элемента векторного пространства.

Принятая в учебниках геометрии под редакцией А. Н. Колмогорова модель, отождествляющая вектор с параллельным переносом, справедливо подвергается критике. Эта модель, корректная с математической точки зрения, не оправдана дидактически, так как оторвана от приложений в физике, и практически в курсах геометрии и физики учитель вынужден был использовать различные понятия вектора. Такая рассогласованность преподавания математики и физики, представляющей собой наиболее важное (по крайней мере в школьном обучении) поле приложений математики, не способствует осуществлению межпредмет-

ных связей, усиливает изоляцию математики от ее приложений.

3.2. Известна другая геометрическая модель вектора, близкая к физическим приложениям. Речь идет об известной модели вектора в виде класса направленных отрезков одинаковой длины и направления (в множестве всех направленных отрезков плоскости вводится отношение эквиполентности: два направленных отрезка одинаковой длины и направления считаются эквиполентными. Это отношение является отношением эквивалентности и поэтому порождает разбиение множества направленных отрезков на классы эквивалентности. Каждый такой класс направленных отрезков и называется вектором).

Эта модель математически корректна и дидактически целесообразна. В ней вектор однозначно определяется любым принадлежащим ему направленным отрезком (представителем класса), а все операции над векторами — через операции над направленными отрезками, причем так, что результаты этих операций не зависят от выбора направленных отрезков. Поэтому, принимая данную модель в обучении, можно исходить из отождествления вектора с направленным отрезком, а в дальнейшем скорректировать это первое представление, приписывая направленному отрезку лишь статус представителя вектора как класса направленных отрезков (класса эквивалентности).

В координатной форме переход от направленного отрезка к классу направленных отрезков осуществляется почти автоматически: пара чисел (a, b) на координатной плоскости или тройка чисел (a, b, c) в координатном пространстве представляют собой координаты не одного, а бесконечного множества направленных отрезков одной длины и одного направления. Вначале, когда вектор отождествляется с направленным отрезком, мы говорим, что все эти направленные отрезки (с одинаковыми координатами) — равные векторы, в дальнейшем — все эти направленные отрезки образуют один вектор (свободный вектор), или принадлежат одному вектору.

3.3. Возникает вопрос, какие начальные понятия векторного исчисления (кроме основного понятия вектора) нужны в школьном курсе, какие знания и умения должны приобрести учащиеся в этой области. Из анализа возможных целесообразных применений векторного аппарата в школьной геометрии и тригонометрии приходим к выводу, что учащимся общеобразовательной средней школы необходимо: 1) уметь производить сложение и вычитание век-

торов и доказывать коммутативность и ассоциативность сложения; 2) уметь производить умножение вектора на вещественное число, понимать смысл и знать законы этой операции; 3) уметь разложить вектор по двум заданным направлениям (на плоскости, в частности по направлениям координатных осей) и знать, что такое разложение определяется однозначно; 4) знать определение тригонометрических функций с помощью радиус-вектора; 5) уметь находить скалярное произведение двух векторов (в различной форме) и знать важнейшие свойства скалярного произведения (коммутативность и дистрибутивность относительно сложения).

Несомненный интерес представляет специальный факультативный курс «Векторные пространства и решение задач линейного программирования», программа которого опубликована в журнале «Математика в школе» (1967, № 4). Этот курс предусматривает обобщение понятия вектора до n-мерного вектора и его использование в линейной алгебре и линейном программировании.

3.4. При использовании векторного аппарата мы должны придерживаться такого принципа: его применение оправдано лишь в том случае, когда оно приводит к более простым и изящным доказательствам теорем и решениям задач, чем при использовании других средств. Приведем несколько (из большого числа) примеров целесообразных (эффективных) применений аппарата векторной алгебры в школьном курсе.

Пример 1. Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними (теорема косинусов).

Пусть в треугольнике ABC (рис. 76) $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$. Отсюда следует, что $\vec{a}=\vec{b}-\vec{c}$. Умножив скалярно каждую часть равенства на саму себя, найдем

$$(\vec{a})^2=(\vec{b}-\vec{c})^2=(\vec{b})^2-2\vec{b}\vec{c}+(\vec{c})^2$$

или

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A. \qquad (1)$$

Если $\angle A=90°$, то из (1) получаем теорему Пифагора

$$a^2=b^2+c^2.$$

Из (1) можно вывести все формулы, необходимые для решения треугольника по данным его элементам.

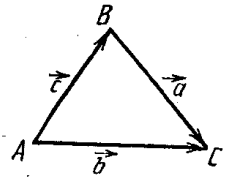


Рис. 76

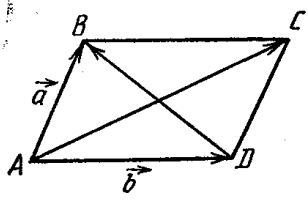


Рис. 77

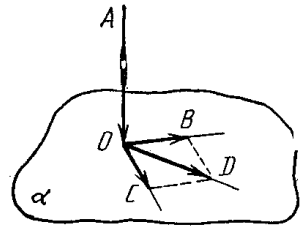


Рис. 78

Пример 2. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

Пусть в параллелограмме $ABCD$ (рис. 77) $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$. Тогда $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, а $\vec{DB} = \vec{a} - \vec{b}$. Отсюда $\vec{AC}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}\,\vec{b}$, $\vec{BD}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}\,\vec{b}$. Складывая почленно эти равенства, находим

$$AC^2 + BD^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

Пример 3. Если дистрибутивность скалярного произведения для случая некомпланарных векторов устанавливается без ссылки на признак перпендикулярности прямой и плоскости, то этот признак может получить весьма простое доказательство с помощью векторного аппарата.

Пусть $AO \perp OB$; $AO \perp OC$; OB, OC, $OD \subset \alpha$. (рис. 78). Докажем, что $AO \perp OD$.

Вектор $\vec{OD}$ можно единственным образом разложить по направлениям двух неколлинеарных векторов $\vec{OB}$ и $\vec{OC}$:

$$\vec{OD} = m\vec{OB} + n\vec{OC}.$$

Так как $(AO \perp OB) \Leftrightarrow (\vec{AO} \cdot \vec{OB} = 0)$; $(AO \perp OC) \Leftrightarrow (\vec{AO} \times \times \vec{OC} = 0)$, то $(AO \perp OD) \Leftrightarrow (\vec{AO} \cdot \vec{OD} = 0)$. Действительно, докажем, что $\vec{AO} \cdot \vec{OD} = 0$. Тогда

$$\vec{AO} \cdot \vec{OD} = \vec{AO}\,(m\vec{OB} + n\vec{OC}) = m\,(\vec{AO} \cdot \vec{OB}) + m\,(\vec{AO} \cdot \vec{OC}) =$$

$$= m \cdot 0 + n \cdot 0 = 0.$$

Теорема доказана.

4. Сочетание координатного и векторного методов

4.1. Наиболее эффективным может оказаться сочетание двух методов, координатного и векторного, осуществляемое переводом вектора в координатную форму. Такое сочетание используется, в частности, в учебнике А. В. Погорелова «Геометрия 6—10» (М., 1981) (это одно из наиболее удачных мест учебника) и приводит к значительному упрощению доказательств некоторых теорем векторной алгебры и решения некоторых задач.

4.2. Проиллюстрируем сочетание двух методов на нескольких примерах, которые могут быть использованы, по крайней мере, в классах с углубленным изучением математики.

Пример 1. Разложение вектора по координатным осям

$$\vec{r} = r\vec{i}\cos\alpha + r\vec{j}\sin\alpha$$

может быть использовано для вывода формул синуса и косинуса суммы двух углов, содержащих по существу всю тригонометрию, так как из них можно получить и формулы приведения, и взаимоотношения между тригонометрическими функциями, и формулы для двойного аргумента и т. д.

Повернем координатные оси на угол α около начала координат (рис. 79). При этом орт $\vec{i}$ перейдет в орт $\vec{i}'$, а орт $\vec{j}$ — в орт $\vec{j}'$. Разложим вектор $\vec{i}'$ по координатным осям Ox и Oy:

$$\vec{i}' = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\alpha. \qquad (1)$$

Заметим теперь, что орт $\vec{j}'$ занимает в системе координат $y'Ox'$ такое же положение, как орт $\vec{i}'$ в системе координат xOy ($\vec{j}'$ образует с полуосью Oy такой же угол α, как и $\vec{i}'$ с полуосью Ox). Поэтому, если в (1) заменить $\vec{i}$ через $\vec{j}$, а $\vec{j}$ через $-\vec{i}$, то получим

$$\vec{j}' = \vec{j}\cos\alpha - \vec{i}\sin\alpha. \qquad (2)$$

Положим теперь, что система координат $x'Oy'$ с ортами $\vec{i}'$ и $\vec{j}'$ повернута еще на угол β и орты заняли новое положение $\vec{i}''$ и $\vec{j}''$.

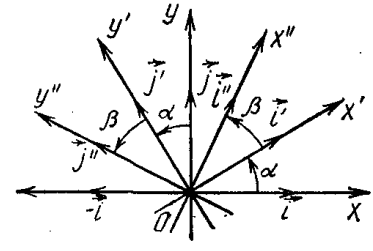


Рис. 79

Пользуясь уже найденными формулами (1) и (2), находим:

$$\left.\begin{aligned}\vec{i}'' &= \vec{i}'\cos\beta + \vec{j}'\sin\beta;\\ \vec{j}'' &= \vec{j}'\cos\beta - \vec{i}'\sin\beta.\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

С другой стороны, эти же орты $\vec{i}''$ и $\vec{j}''$ можно получить из первоначальной системы координат, повернув ее сразу на угол $\alpha+\beta$:

$$\left.\begin{aligned}\vec{i}'' &= \vec{i}\cos(\alpha+\beta) + \vec{j}\sin(\alpha+\beta);\\ \vec{j}'' &= \vec{j}\cos(\alpha+\beta) - \vec{i}\sin(\alpha+\beta).\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Приравнивая правые части (3) и (4), получаем

$$\vec{i}\cos(\alpha+\beta) + \vec{j}(\alpha+\beta) = \vec{i}'\cos\beta + \vec{j}'\sin\beta.$$

Подставим в правую часть (4) выражения для $\vec{i}'$ и $\vec{j}'$ через $\vec{i}$ и $\vec{j}$ из (1) и (2):

$$\vec{i}\cos(\alpha+\beta) + \vec{j}\sin(\alpha+\beta) = \left(\vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\alpha\right)\cos\beta +$$

$$+ \left(\vec{j}\cos\alpha - \vec{i}\sin\alpha\right)\sin\beta = \vec{i}(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) +$$

$$+ \vec{j}(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \qquad (5)$$

Сравнивая коэффициенты $\vec{i}$ и $\vec{j}$ в левой и правой частях (5), находим:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Приведенный вывод по сравнению с традиционным является и более простым, и более общим.

Пример 2. Рассмотрим три попарно перпендикулярных единичных вектора $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ с общим началом O (т. е. $\vec{i}\perp\vec{j}$, $\vec{j}\perp\vec{k}$, $\vec{k}\perp\vec{i}$ и $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$). Оси, определяемые этими векторами, назовем *координатными осями* и обозначим соответственно Ox, Oy и Oz. Начало O данных единичных векторов назовем *началом координат*, а плоскости xOy, xOz, yOz — *координатными плоскостями*.

Векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ с общим началом O вместе с координатными осями и координатными плоскостями образуют прямоугольную систему координат в пространстве. Эта система ко-

ординат полностью определяется началом O и тремя попарно перпендикулярными единичными векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, исходящими из этого начала. Поэтому мы будем пользоваться следующим обозначением данной системы координат: $(O;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$.

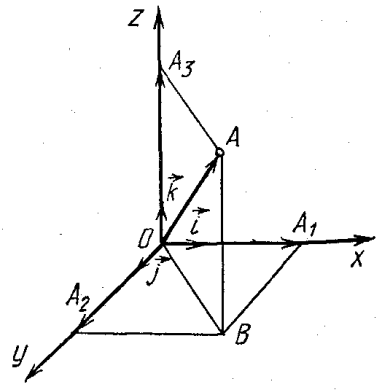


Рис. 80

Пусть A — произвольная точка пространства. Вектор $\overrightarrow{OA}$ с началом в начале координат и концом в точке A называется также *радиус-вектором* точки A.

Известно, что вектор $\overrightarrow{OA}$ можно единственным образом разложить по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2 + \overrightarrow{OA}_3$ или $\overrightarrow{OA} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, где $\overrightarrow{OA}_1 = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OA}_2 = y\vec{j}$, $\overrightarrow{OA}_3 = z\vec{k}$ (рис. 80). Числа x, y, z называются *координатами точки* A или *координатами вектора* $\overrightarrow{OA}$ (радиус-вектора точки A).

Необходимо сообщить учащимся и названия координат: первые две называются так же, как на плоскости (x — абсциссой, y — ординатой), а третья координата z — аппликатой точки A (или вектора $\overrightarrow{OA}$).

Вводятся обозначения: $A(x, y, z)$ или $\overrightarrow{OA}(x, y, z)$ — «точка A (или вектор $\overrightarrow{OA}$) с координатами x, y, z».

Из предыдущего следует, что каждой точке A пространства (или каждому радиус-вектору $\overrightarrow{OA}$) соответствует точно одна тройка координат (x, y, z). Естественно, возникает вопрос, будет ли и каждой тройке вещественных чисел (x, y, z) соответствовать точно одна точка пространства (точно один радиус-вектор) с координатами x, y, z.

Для ответа на этот вопрос можно решить сначала частную задачу. Например, даны три числа: 4, 2 и 3. Построить точку A с координатами (4, 2, 3).

Решаем задачу следующим образом. Строим векторы $\overrightarrow{OA}_1 = 4\vec{i}$, $\overrightarrow{OA}_2 = 2\vec{j}$ и $\overrightarrow{OA}_3 = 3\vec{k}$. Через точки A_1 и A_2 проводим прямые, параллельные соответственно осям Oy и Ox. Пусть B — точка пересечения этих прямых. Через точки B и A_3 проводим прямые, параллельные соответственно оси Oz и OB. Пусть эти прямые пересекаются в точке A. По-

строенная таким образом точка A искомая. Действительно $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2 + \overrightarrow{OA}_3 = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

Так как разложение $\overrightarrow{OA}$ по $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ единственно и каждый шаг в осуществленном построении выполняется однозначно, то тройке (4, 2, 3) соответствует точно одна точка A.

Если повторить это построение для произвольной тройки (x, y, z) вещественных чисел, получим, что каждой тройке чисел соответствует точно одна точка пространства с координатами (x, y, z).

Полученные результаты можно сформулировать в виде следующей теоремы: заданием прямоугольной системы координат $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ в пространстве устанавливается взаимнооднозначное отображение $\Pi \leftrightarrow R^3$ (т. е. одновременно отображения $\Pi \to R^3$ и $R^3 \to \Pi$).

В соответствии с этим отображением точку пространства иногда отождествляют с соответствующей ей тройкой вещественных чисел и вместо $A(x, y, z)$ пишут $A = (x, y, z)$ или вместо $\overrightarrow{OA}(x, y, z)$ пишут $\overrightarrow{OA} = (x, y, z)$. При этом пространство Π отождествляется с множеством R^3 всевозможных троек вещественных чисел и говорят «пространство R^3».

Пример 3. Мы рассмотрели введение координат лишь для радиус-векторов точек пространства, т. е. для векторов с началом в начале координат.

Так как равные векторы имеют одинаковые разложения по трем некомпланарным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, то целесообразно распространить понятие координат на любые векторы.

При заданной прямоугольной системе координат в пространстве $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ координатами произвольного вектора $\vec{a}$ называются числа x, y, z в разложении $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Так как данное разложение — единственное для данного вектора $\vec{a}$, этот вектор однозначно определяется заданием тройки координат (x, y, z), и в этом смысле можно писать $\vec{a} = (x, y, z)$.

Из данного определения непосредственно следует:

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1) \text{ и } \vec{b} = (x_2, y_2, z_2) \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

С помощью этой теоремы устанавливается связь между координатами произвольного вектора $\overrightarrow{AB}$ и координатами его начала A и конца B:

$$A=(x_1,\ y_1,\ z_1)\ \text{и}\ B=(x_2,\ y_2,\ z_2)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1),$$

Используя определение и свойства скалярного произведения, получаем следующие теоремы:

1) $\vec{i}^2=\vec{j}^2=\vec{k}^2=1;\ \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0;$

2) $\overrightarrow{OA}=(x,\ y,\ z)\Rightarrow|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2};$

3) $\vec{a}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $\vec{b}=(x_2,\ y_2,\ z_2)\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2;$

4) $\vec{a}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $\vec{b}=(x_2,\ y_2,\ z_2)\Rightarrow\cos(\vec{a},\ \vec{b})=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|};$

5) $A=(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $B=(x_2,\ y_2,\ z_2)\Rightarrow|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$

Доказательства этих теорем весьма просты и могут быть найдены самостоятельно учащимися.

Пример 4. Какая-нибудь фигура Φ пространства может быть определена с помощью характеристического свойства, т. е. свойства, присущего всем точкам Φ и только им (не присущего ни одной точке пространства, не принадлежащей Φ).

Если в пространстве введена прямоугольная система координат, то множество Π можно заменить множеством R^3, и всякая фигура Φ, в том числе плоскость или сфера, представляет собой подмножество R^3 ($\Phi\subset R^3$). Это подмножество определяет некоторое «тернарное» отношение (отношение между тремя предметами, в данном случае между тремя вещественными числами): всякая

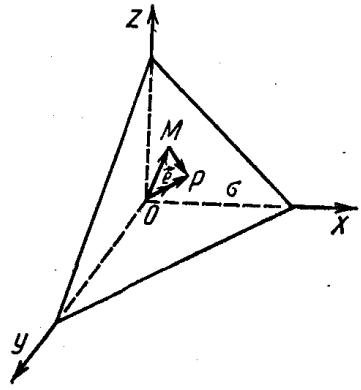


Рис. 81

тройка (x, y, z) вещественных чисел находится в этом отношении тогда и только тогда, когда $(x, y, z) \in \Phi$. Такое отношение можно также представить в виде отображения типа

$$R^3 \xrightarrow{P} \{\text{И, Л}\},$$

т. е. в виде логической функции (трехместного предиката), определенной на множестве всевозможных троек вещественных чисел и принимающей значения И (истина) или Л (ложь): $P(x, y, z) = \text{И} \Leftrightarrow (x, y, z) \in \Phi$ и $P(x, y, z) = \text{Л} \Leftrightarrow \Leftrightarrow (x, y, z) \notin \Phi$.

В таком случае $\Phi = \{(x, y, z) \mid P(x, y, z)\}$, причем предикат P обычно выражается уравнением или неравенством.

Пример 5. Найдем подобное представление для плоскости и для сферы. Очевидно, задача сводится к нахождению соответствующих выражений для предиката P, характеризующего каждое из этих множеств точек (уравнения плоскости и сферы).

1) Пусть вектор $\vec{OP} = \vec{p}$ проведен из начала координат перпендикулярно к данной плоскости σ (рис. 81), причем $\vec{p} = |\vec{p}|\vec{e}$, где $|\vec{p}| = m(0, \sigma)$, а $\vec{e}$ — единичный вектор, сонаправленный с $\vec{p}$ $(\vec{e} \uparrow\uparrow \vec{p}$ и $|\vec{e}| = 1)$. Произвольная точка M плоскости σ определяется заданием радиус-вектора $\vec{OM}$, проведенного в эту точку. Положим, что $\vec{OM} = \vec{r} = (x, y, z)$. Так как $\vec{MP} = \vec{OP} - \vec{OM} = \vec{p} - \vec{r}$ и $\vec{MP} \perp \vec{e}$, то $(\vec{p} - \vec{r}) \cdot \vec{e} = 0$, или $\vec{r} \cdot \vec{e} = \vec{p} \cdot \vec{e}$. Это «векторное уравнение» легко перевести на язык координат.

Пусть α, β, γ — углы вектора $\vec{e}$ с осями координат. В таком случае $\vec{e} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k}$, а вектор $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Отсюда $\vec{r} \cdot \vec{e} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$. С другой стороны, так как $\vec{e} \uparrow\uparrow \vec{p}$ и $|\vec{e}| = 1$, то $\vec{p} \cdot \vec{e} = |\vec{p}||\vec{e}| \cdot \cos 0^\circ = p$.

Таким образом, получаем уравнение

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p,$$

называемое *нормальным уравнением плоскости в координатной форме.*

Теперь плоскость σ можно представить следующим образом:

$$\sigma = \{(x, y, z) \mid x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p\},$$

где $p = m(0, \sigma)$, а α, β, γ — углы, образуемые вектором, перпендикулярным плоскости σ, с осями координат.

Можно доказать, что всякое уравнение вида

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (1)$$

является уравнением плоскости.

Рассмотрим вектор $\vec{m}(a, b, c)$. Его можно представить следующим образом: $\vec{m} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$. Возьмем также вектор $\vec{r}(x, y, z)$, т. е. $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Тогда уравнение (1) примет вид $\vec{r} \cdot \vec{m} = -d$.

Число $-d$ можно всегда рассматривать как неотрицательное (если $-d < 0$, то можно в уравнении (1) заменить все знаки на противоположные). Пусть $-d = k \geqslant 0$. Тогда $\vec{r} \cdot \vec{m} = k$ или $\vec{r}\frac{\vec{m}}{|\vec{m}|} = \frac{k}{|\vec{m}|}$, или $\vec{r}\frac{\vec{m}k}{|\vec{m}|^2} = \left(\frac{k}{|\vec{m}|}\right)^2$. Положив $\frac{k}{|\vec{m}|}\vec{m} = \vec{p}$, получим $\vec{r} \cdot \vec{p} = \vec{p}^2 = \vec{p} \cdot \vec{p}$ или $\vec{p}(\vec{r} - \vec{p}) = 0$. Отсюда следует, что вектор $\vec{r} - \vec{p}$ перпендикулярен к вектору $\vec{p}$. Мы получили: вектор $\vec{r} - \vec{p}$ с фиксированным началом и переменным концом остается перпендикулярным к фиксированному вектору $\vec{p}$. Множество точек, принадлежащих прямым, каждая из которых проходит через фиксированную точку перпендикулярно к данной прямой $\vec{p}$, есть плоскость, проходящая через эту точку перпендикулярно к прямой $\vec{p}$. Эта плоскость удалена от точки O на расстояние $m(0, \sigma) = |\vec{p}| = \frac{-d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

2) Сферой с центром C и радиусом r называется множество точек пространства, удаленных от точки C на расстояние r, т.е. $\{M \mid m(C, M) = r\}$.

Пусть C имеет координаты (a, b, c), а M — произвольная точка сферы с координатами (x, y, z). Тогда $m(C, M) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, а следовательно, уравнение сферы $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r$ или $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$.

25. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1. Различные подходы

1.1. Имеются различные подходы к решению вопроса о внедрении идеи геометрических преобразований в школьное обучение.

Общеизвестно, что идея геометрических преобразований весьма слабо отражена в школьных программах. В прошлом пытались несколько исправить положение включением специальной темы в IX классе. Однако это решение вопроса оказалось неудовлетворительным. Кроме недостаточной подготовки учителей к преподаванию такой темы в старших классах, можно указать еще на одно важное обстоятельство, которое также является причиной неудачи.

Учащихся, приученных смотреть на геометрические фигуры и мыслить о них с традиционной «евклидовой» точки зрения, трудно переучивать в старших классах. Их мышление в области геометрии уже натренировано в определенном направлении. Решая, например, какую-нибудь задачу, в которой требуется обосновать равенство двух отрезков, ученик сразу же начинает искать или строить два равных треугольника, в которых эти отрезки служат соответствующими сторонами, даже в том случае, когда намного проще указать перемещение, переводящее один из этих отрезков в другой. Именно потому что его мышление направлено на поиск равных треугольников, он не видит более простого решения, основанного на применении преобразований.

Можно было предполагать, что если бы геометрические преобразования изучались раньше, чем в старших классах, и не все в одном разделе курса, они могли бы послужить основой для более рационального построения курса геометрии как в теоретической, так и в его практической части.

Однако, как показал десятилетний опыт использования учебников под редакцией А. Н. Колмогорова, введение и широкое использование геометрических преобразований с VI класса в качестве метода доказательства теорем и решения задач вызывает у учащихся затруднения. Здесь имеется более глубокая, психологического характера причина. На обычно используемых в обучении геометрии чертежах можно непосредственно наблюдать равные треугольники, их можно также построить, но нельзя непосредственно «наблюдать» и нельзя «построить» преобразования — их можно только воображать. Это, разумеется, вызывает дополнительные затруднения, даже в тех случаях, когда применение

преобразований заслуживает предпочтения. Само доказательство с помощью преобразований может оказаться значительно проще, однако поиск его труднее.

Таким образом, если придерживаться точки зрения, что обучать доказательству можно, знакомя учащихся с доказательствами в готовом виде, то во многих случаях проще применять преобразования. Если же придерживаться концепции обучения, соответствующей нашей точке зрения, согласно которой обучение доказательству означает прежде всего обучение поиску доказательства, то широкое применение преобразований становится затруднительным.

1.2. Известен и другой более радикальный подход, предусматривающий эффективное использование группы движений в качестве основы для построения всей школьной геометрии. Такая схема построения геометрии была разработана в 50-х гг. немецким математиком Ф. Бахманом в его книге «Построение геометрии на основе понятия симметрии» (М., 1969).

По схеме Бахмана основой для построения геометрии служат симметрии (осевые и центральные), представляющие собой все инволюционные элементы группы движений. Возможность построения геометрии на такой основе объясняется тем, что осевые симметрии являются порождающими элементами евклидовой группы движения, т. е. всякое движение евклидовой плоскости (центральная симметрия, поворот, перенос) представимо в виде произведения (не более трех) осевых симметрий.

Множество точек и прямых (евклидова плоскость) изоморфно множеству инволюционных элементов группы движений, т. е. множеству осевых и центральных симметрий; при этом отношения принадлежности, перпендикулярности, параллельности и другие, инвариантные относительно группы движений, переводятся в определенные теоретико-групповые отношения. Это открывает возможность использования теоретико-группового аппарата в геометрии.

Очевидно, что приемлемая в педагогическом отношении реализация схемы Бахмана может оказаться вполне доступной для учащихся, углубленно изучающих математику, причем, как и в случае векторного построения по Вейлю, лишь в порядке ознакомления еще с одним вариантом построения геометрии.

1.3. Более реальный подход к внедрению идеи геометрических преобразований в школьное обучение характерен для программы 1970 г. и программы 1981 г. (базисной). Однако имеется существенное различие в трактовке и ис-

пользовании геометрических преобразований учебниками, составленными в соответствии с первой и второй программами. В учебниках под редакцией А. Н. Колмогорова геометрические преобразования рассматриваются как отображения плоскости на себя, в учебнике А. В. Погорелова — как преобразования отдельных фигур, определяемых конструктивно с помощью соответствующих правил (процедур) построения. Что же касается использования геометрических преобразований, то в последнем учебнике они значительно ограничены.

В соответствии с программой 1981 г. в IV—V классах предусматривается лишь ознакомление учащихся с примерами симметричных фигур. В VI—VIII классах выделена тема «Равенство и подобие фигур. Геометрические преобразования», *включающая вопросы: осевая и центральная* симметрии, поворот и параллельный перенос, примеры фигур, обладающих симметрией.

2. Геометрические преобразования в планиметрии

2.1. Геометрическое преобразование и числовая функция — две модели общего понятия отображения одного множества в другое, т. е. общего понятия функции. Эти модели отличаются природой элементов области определения и области значений, способом задания соответствия. Совершенно очевидно, что методика изучения геометрических преобразований должна быть ориентирована на подчеркивание идеи функции, которая играет здесь объединяющую роль, устраняя традиционную изолированность геометрии.

Целесообразно показать сходство и различие понятий «геометрическое преобразование» и «числовая функция». Каждое геометрическое преобразование представляет собой некоторую функцию, только области определения и значения этой функции являются не числовыми, а точечными множествами. Кроме того, числовая функция «преобразовывает» (как и геометрическое преобразование) одно множество (только не точек, а чисел) в другое (или в это же) по определенному закону.

Такое сопоставление способствует выяснению того, что во всяком преобразовании плоскости область определения и область значений — плоскость.

Наблюдения показывают, что учащиеся затрудняются ответить на вопрос, чем определяется данное геометрическое преобразование или когда можно считать его заданным.

В учении о функциях выясняется, что функцию можно считать заданной, если задана область определения и каким-то способом указано правило, по которому для каждого значения аргумента можно определить соответствующее ему значение функции.

Очевидно, так же четко необходимо выяснить этот вопрос и относительно геометрических преобразований. Например, как должен воспринимать ученик высказывание «на плоскости задана симметрия относительно оси x»? Он должен понимать, что преобразованию подвергается множество точек плоскости и что с каждой точкой A плоскости сопоставляется точка A' этой же плоскости по следующему правилу: 1) $AA' \perp x$; 2) A и A' лежат по разные стороны от прямой x и на равных расстояниях от нее (или точка A' совпадает с точкой A, если $A \in x$).

При изучении числовых функций нас обычно интересует умение находить для каждого значения аргумента (из области определения) соответствующее значение функции. При изучении же геометрических преобразований нас интересует не только преобразование отдельных точек плоскости, но и определенных фигур (отрезка, прямой, треугольника, многоугольника, круга и т. д.). В связи с этим возникают некоторые трудности, которые объясняются, в частности, неумением учащихся определить образ отдельной точки в данном преобразовании и непониманием того, что образ фигуры в этом преобразовании есть множество образов всех ее точек.

2.2. Ввиду того что рассматриваемые преобразования плоскости являются обратимыми отображениями плоскости на себя, они допускают обратные преобразования, определяемые так же, как обратная функция (только геометрическая наглядность делает это понятие сразу же ясным, тем самым способствуя выяснению и понятия обратной числовой функции).

Если преобразование G переводит точку A в точку A', т. е. $G(A) = A'$, то обратное преобразование G^{-1} определяется как такое, которое переводит точку A' в A, т. е. $G^{-1}(A') = A$.

Это общее понятие обратного преобразования формируется, разумеется, на примерах конкретных геометрических преобразований. Никаких затруднений не вызывает у учащихся понимание того, что преобразование, обратное параллельному переносу, есть тоже параллельный перенос и что векторы этих переносов противоположны; что преобразование, обратное повороту с центром O и углом α, есть

поворот с тем же центром на угол $-\alpha$; что преобразование, обратное симметрии относительно оси x (или центра O), есть эта же симметрия; что преобразование, обратное гомотетии с центром O и коэффициентом k, есть гомотетия с тем же центром и коэффициентом $1/k$.

Как видно, симметрия выделяется среди всех рассматриваемых преобразований тем, что она сама себе обратна (инволютивна).

2.3. При изучении конкретных геометрических преобразований необходимо также формировать понятие о произведении преобразований как о результате их последовательного применения. Это легко осуществимо с помощью специально подобранных упражнений, в которых к точке или фигуре применяются последовательно несколько преобразований (которые, в частности, могут совпадать). Например, требуется данный треугольник ABC подвергнуть преобразованию симметрии относительно данной оси x, а затем вращению около центра O на угол 90°. Если же треугольник подвергнуть этим же преобразованиям, но только в обратном порядке (т. е. сначала вращению около центра O на 90°, а затем — преобразованию симметрии относительно оси x), то получим различные результаты, подтверждающие некоммутативность произведения преобразований.

При рассмотрении произведения симметрии на себя, естественно, возникает понятие *тождественного* преобразования, «переводящего» каждую точку в саму себя, относительно которого каждая точка плоскости *инвариантна.*

2.4. Множество точек, инвариантных относительно данного преобразования, образует фигуру, инвариантную относительно этого преобразования (в случае тождественного преобразования вся плоскость инвариантна). Например, симметрия относительно оси x оставляет инвариантной прямую x. Но она оставляет также инвариантной всякую прямую плоскости, перпендикулярную к x, так как каждая такая прямая отображается на себя при данной симметрии. Однако точки прямой, перпендикулярной к оси симметрии (кроме точки пересечения с осью симметрии), не являются инвариантными. Можно сказать, что ось симметрии «точечно» инвариантна, а прямая, перпендикулярная к ней, лишь «в целом» инвариантна относительно этой симметрии. Это легко разъяснить учащимся.

2.5. Ввиду того что особый интерес представляет преобразование различных фигур, в обучении необходимо выяснить, какие «деформации» фигур связаны с теми или иными преобразованиями, иначе говоря, какие свойства фигур ме-

няются при тех или иных преобразованиях, какие остаются неизменными (инвариантными). С этой точки зрения важно классифицировать рассматриваемые преобразования по инвариантным свойствам фигур.

Фактически преобразования, которые так или иначе рассматриваются в школьном обучении, относятся к трем группам:

а) преобразования, не деформирующие фигуры, т. е. различные виды движений, переводящие любую фигуру в равную ей (при этом лишь осевая симметрия меняет ориентацию фигуры);

б) преобразования, меняющие размеры, но сохраняющие форму фигур, т. е. переводящие любую фигуру в подобную ей (гомотетия и вообще преобразования подобия, т. е. произведение гомотетии и движения);

в) преобразования, меняющие и размеры, и форму фигур, сохраняющие лишь прямолинейное расположение (коллинеарность) точек и параллельность прямых; это — аффинные преобразования, которые, хотя в явном виде и не изучаются в школе, неизбежно встречаются при изображении пространственных тел на плоскости.

Важно, чтобы учащиеся понимали, какое «воздействие» на различные фигуры имеет каждое изучаемое геометрическое преобразование.

2.6. Представляет интерес и классификация движений плоскости по числу неподвижных (инвариантных) точек.

Единственный вид движения без неподвижных точек — параллельный перенос, с одной неподвижной точки — поворот (в частности, и центральная симметрия, т. е. поворот на 180°). Если движение имеет две неподвижные точки, то оно имеет неподвижную прямую, проходящую через эти две точки, и является осевой симметрией. Движение с тремя неподвижными точками, не лежащими на одной прямой,— тождественное преобразование, при котором каждая точка плоскости неподвижна.

На факультативных занятиях можно построить теорию движений в таком аспекте.

3. Геометрические преобразования в стереометрии

3.1. Программа 1981 г. (базисная) в рамках первой темы стереометрии «Геометрические фигуры и их свойства» включает следующие геометрические преобразования: симметрию относительно точки и плоскости; примеры тел и по-

верхностей, обладающих симметрией; параллельный перенос; понятие о равенстве и подобии фигур.

3.2. При введении геометрических преобразований в пространстве может быть использована аналогия с геометрическими преобразованиями на плоскости.

Прежде всего *преобразованием пространства* (так же, как и плоскости) называют взаимно-однозначное отображение пространства на себя. *Движением пространства* (так же, как и плоскости) называется преобразование пространства, сохраняющее расстояния между точками. *Параллельным переносом пространства* (так же, как и плоскости) называется преобразование пространства $\Pi \xrightarrow{I} \Pi$ (взаимно-однозначное отображение T пространства на себя), при котором

$$\forall A, B \in \Pi\,(A_1 = T(A) \text{ и } B_1 = T(B) \Rightarrow |AA_1| = |BB_1| \text{ и } [AA_1) \uparrow\uparrow [BB_1))$$

(каждая точка переводится на одно и то же расстояние и в одном и том же направлении, лучи $[AA_1)$ и $[BB_1)$ сонаправлены).

Если же $A = A_1$, то и $B = B_1$, т. е. каждая точка отображается на себя, и такой параллельный перенос есть тождественное отображение. Параллельный перенос пространства, как и плоскости, полностью определяется заданием одной пары $(A, T(A))$ соответственных точек.

Отражение от плоскости (симметрия пространства относительно плоскости) может быть введено по аналогии с осевой симметрией плоскости.

3.3. Применение геометрических преобразований приводит к рациональному построению некоторых разделов курса стереометрии. Так, выражение отношения перпендикулярности с помощью отражения от плоскости: $a \perp \alpha \Leftrightarrow a \subset \alpha$ и $a = S_\alpha(a)$ (прямая перпендикулярна к плоскости тогда и только тогда, когда она не лежит в этой плоскости и совпадает со своим образом в отражении от этой плоскости) и использование свойств отражения приводит к значительному упрощению теории перпендикулярности прямых и плоскостей в пространстве.

Имеются дедуктивные системы стереометрии с отражением от плоскости в качестве одного из исходных понятий и некоторыми свойствами отражения, выраженными в аксиомах. Так или иначе (в качестве исходного или производного определяемого понятия) отражение от плоскости, очевидно, целесообразно использовать в курсе стереометрии.

3.4. Параллельное проектирование также можно рассмат-

ривать с общей точки зрения: отображение $\Pi \xrightarrow{P^l_\alpha} \alpha$ пространства на плоскость α, называемое параллельным проектированием на плоскость α по направлению $l\,(\overline{l \parallel \alpha})$, определяется следующим образом: $P^l_\alpha(A) = A_1 \Leftrightarrow A_1 = l_1 \cap \alpha$ и $l_1 \parallel l$ и $A \in l_1$.

Легко доказывается существование и единственность образа любой точки пространства в этом отображении.

26. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ

1. Геометрические построения в программе

1.1. Программа 1981 г. (базисная) предусматривает: в IV—V классах ознакомление с инструментами (линейкой, угольником, транспортиром, циркулем), построение отрезков и углов заданной величины, построение перпендикуляра к прямой, построение параллельных прямых; в VI—VIII классах — решение простейших задач на построение с помощью циркуля и линейки; в IX—X классах — построения в пространстве.

Как видно, формулировки вопросов в базисной программе весьма общие (поэтому программа и называется «базисной») и требуют дальнейшей конкретизации.

1.2. Задачам на построение до недавнего времени уделялось неоправданно много внимания в школьном курсе геометрии в ущерб усвоению других не менее важных идей. К тому же необходимо учесть, что выполнение построений с ограниченным набором инструментов, в частности с помощью циркуля и линейки, не имеет особого прикладного значения, так как в чертежной практике предпочитают пользоваться более широким набором инструментов, упрощающим процесс выполнения построений.

Однако задачи на построение с помощью циркуля и линейки (или другого ограниченного набора инструментов) выполняют определенные развивающие функции; кроме того, в них ставятся некоторые важные теоретические вопросы курса геометрии (пересечение геометрических фигур, геометрические преобразования), и целесообразность решения некоторого числа таких задач не вызывает сомнения.

2. Геометрические построения в систематическом курсе планиметрии

2.1. Хорошей традицией, связанной с задачами на построение, является применение четырехэтапной схемы про-

цесса решения: анализ, построение, доказательство и исследование.

Анализ, цель которого — составление плана решения задачи, осуществляется по-разному при различных методах построения: иногда предполагают искомую фигуру построенной, иногда разбивают условие задачи на несколько частей и т. д. *Построение* — осуществление плана решения задачи, составленного в результате анализа. *Доказательство* — установление правильности решения, доказательство того, что полученное решение удовлетворяет условиям задачи. *Исследование* — определение всевозможных случаев, допускаемых условиями задачи, и числа решений в каждом из этих случаев.

2.2. Наиболее широкое применение находят следующие методы геометрических построений на плоскости:

а) метод геометрических мест (выражение «геометрическое место точек, обладающих свойством P» понимается как синоним выражения «множество точек, обладающих свойством P», т. е. $\{x \mid P(x)\}$ (см.: Колмогоров А. Н. Об учебном пособии «Геометрия 6—10» А. В. Погорелова.— Математика в школе, 1983, № 2, с. 45);

б) метод применения движений (параллельного переноса, поворота, осевой симметрии);

в) метод подобия.

Сущность каждого из этих методов разъясним на примере какой-нибудь задачи. Задачу на метод геометрических мест решим полностью для иллюстрации описанной (см. 2.1) четырехэтапной схемы.

Сущность ***метода геометрических мест*** состоит в следующем: задача сводится к отыскиванию некоторой точки (или множества точек), характеризуемой условием, имеющим вид конъюнкции: $P_1(X)$ **и** $P_2(X)$, т. е. задача состоит в отыскании множества точек $\{X \mid P_1(X)$ **и** $P_2(X)\}$. Но это множество, как известно, равно пересечению двух множеств, характеризуемых соответственно условиями P_1 и P_2:

$$\{X \mid P_1(X) \text{ и } P_2(X)\} = \{X \mid P_1(X)\} \cap \{X \mid P_2(X)\}.$$

Поэтому отыскивают эти два множества, и их пересечение есть множество решений задачи.

Рассмотрим задачу построения окружности данного радиуса R, касающейся данной прямой a и проходящей через данную точку A.

Анализ. Так как требуется построить окружность данного радиуса R, то необходимо отыскать центр этой окружно-

сти или центры таких окружностей (если их более одной).

Эти центры удовлетворяют двум условиям:

1) P_1 — удалены от прямой a на расстояние R (так как окружность должна касаться прямой a)

и

2) P_2 — удалены от данной точки A на расстояние R (так как окружность должна проходить через точку A).

Найдем множества точек, характеризуемые каждым из свойств P_1 и P_2 в отдельности:

$\{X \mid P_1(X)\}$ — образует две прямые, параллельные a и отстоящие от нее на расстоянии R;

$\{X \mid P_2(X)\}$ — образует окружность радиуса R с центром в точке A.

Так как искомые точки характеризуются свойством $P_1(X)$ **и** $P_2(X)$, то их множество $\{X \mid P_1(X)$ **и** $P_2(X)\} = \{X \mid P_1(X) \cap \cap \{X \mid P_2(X)\} = \{O_1, O_2\}$ (рис. 82).

Построение. 1) Строим две прямые, параллельные данной прямой a и отстоящие от нее на расстоянии R;

2) Строим окружность радиуса R с центром в точке A;

3) Пересечение двух прямых с окружностью представляет собой решение задачи.

В рассматриваемом случае (см. рис. 82) это пересечение состоит из двух точек O_1 и O_2, т. е. мы получили центры двух окружностей, удовлетворяющих условиям задачи (два решения).

Доказательство. Каждая из окружностей радиуса R с центрами O_1 и O_2 удовлетворяет условиям задачи: касается прямой a, так как центры O_1 и O_2 отстоят от прямой a на расстоянии, равном радиусу, и проходит через точку A, так как центры O_1 и O_2 отстоят от точки A на расстоянии, равном радиусу.

Исследование. Мы получили два решения. Естественно, возникает вопрос, всегда ли задача имеет два решения (учащиеся легко замечают, что не всегда, и находят некоторые другие случаи расположения данных прямой a и точки A, когда имеется другое число решений).

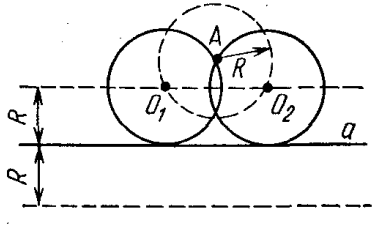


Рис. 82

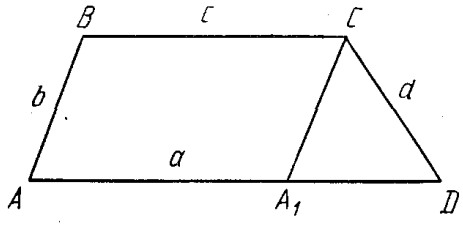


Рис. 83

Меняя положение точки A относительно прямой a, приходим к выводу, что число n решений есть функция расстояния d от точки A до прямой a, $n=n(d)$, причем

$$n=\begin{cases}2, & \text{если } 0\leqslant d<2R;\\ 1, & \text{если } d=2R;\\ 0, & \text{если } d>2R.\end{cases}$$

Сущность *метода применения движений* состоит в следующем: *предполагая искомую фигуру построенной, подбирают* такое движение, в результате которого образуется некоторая вспомогательная фигура, удовлетворяющая двум условиям: 1) она может быть построена по данным задачи; 2) она связана с искомой фигурой таким образом, что, будучи сама построенной, позволяет построить и искомую фигуру.

В качестве иллюстрации метода приведем планы решения трех задач, в которых применяются различные виды перемещений (параллельный перенос, поворот и осевая симметрия).

Задача 1. Построить трапецию по длинам четырех сторон (a, b, c, d).

Допустим, что трапеция $ABCD$ (рис. 83) удовлетворяет условиям задачи. Применим параллельный перенос на вектор $\vec{BC}$ и построим образ отрезка AB в этом переносе: $T_{\vec{BC}}(AB)=A_1C$. Отсюда следует, что $A_1C=AB$ и $A_1C\parallel AB$, т. е. $ABCA_1$ — параллелограмм. Следовательно, $AA_1=BC$.

В образовавшемся треугольнике A_1CD: $A_1C=b$; $CD=d$; $A_1D=a-c$. Таким образом, треугольник A_1CD может быть построен по данным задачи. Построив его и применив к A_1C перенос $T_{\vec{CB}}$, получим $T_{\vec{CB}}(A_1C)=AB$ и искомую трапецию $ABCD$ (вектор $\vec{CB}$ определен модулем c и направлением DA_1).

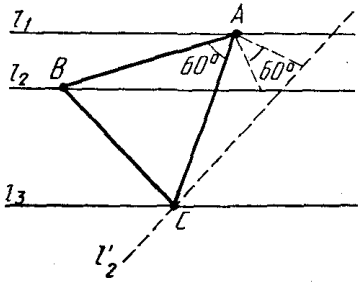


Рис. 84

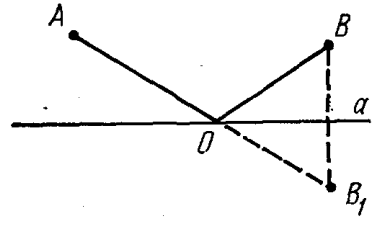


Рис. 85

Задача 2. Построить равносторонний треугольник, вершины которого лежат на трех данных параллельных прямых l_1, l_2, l_3.

Допустим, что треугольник ABC (рис. 84) искомый. Если применить поворот $P_A^{60^\circ}$ (вокруг точки A на угол в 60°), получим $P_A^{60^\circ}(B) = C$ и $P_A^{60^\circ}(l_2) = l_2'$. Следовательно, $B \in l_2 \Rightarrow C \in l_2'$ и $C \in l_3$ и $C \in l_2' \Rightarrow l_3 \cap l_2' = \{C\}$.

Прямую l_2' мы можем построить, и тогда ее точка пересечения с прямой l_3 будет вершиной C треугольника. Этим определяется его сторона AC, после чего построить третью вершину B уже не составляет никакого труда.

Задача 3. Точки A и B лежат по одну сторону от прямой a. Найти на прямой a точку O, такую, чтобы $|AO| + |OB|$ была наименьшей.

Пусть $B_1 = S_a(B)$ (рис. 85). Тогда $S_a(OB) = OB_1$ и, следовательно, $OB = OB_1$. Поэтому $AO + OB = AO + OB_1$, и так как по известной аксиоме $AO + OB_1 \geqslant AB_1$, то $AO + OB_1$ (а следовательно, и $AO + OB$) имеет наименьшее значение, когда $O \in AB_1$.

Отсюда следует простой план построения:

1) строим точку B_1, симметричную точке B (или A_1, симметричную точке A) относительно прямой a;

2) $\{O\} = AB_1 \cap a$ (или $O = A_1B \cap a$).

Сущность *метода подобия* состоит в следующем: условие задачи разбивают на две части, одна из которых определяет «форму» искомой фигуры (определяет ее с точностью до подобия), а другая — ее размеры. По первой части условия строят фигуру, подобную искомой, затем преобразовывают ее в искомую с учетом второй части условия.

В качестве иллюстрации метода рассмотрим следующую задачу: построить треугольник по двум углам α и β и высоте h, проведенной из вершины третьего угла.

Разобьем условие задачи на две части: 1) два угла α и β (определяют искомый треугольник с точностью до подобия); 2) высота h, опущенная из вершины третьего угла (выделяет из множества подобных треугольников искомый).

Получается следующий план решения задачи: 1) по двум данным углам α и β строим треугольник, подобный искомому; 2) подобно преобразовываем построенный треугольник в искомый (это легко осуществляется посредством гомотетии с центром в вершине третьего угла построенного треугольника).

3. Геометрические построения в стереометрии

3.1. Так как не существует инструмента для геометрических построений в пространстве, в стереометрии рассматривают два вида построений: 1) «воображаемые» (или условные); 2) построения на изображении (на «проекционном чертеже»).

При выполнении «воображаемых» построений считаем, что, во-первых, умеем строить плоскость, если заданы определяющие ее элементы (три точки, не лежащие на одной прямой, или прямая и точка вне ее, или две пересекающиеся прямые, или две параллельные прямые), и, во-вторых, в любой плоскости умеем осуществить все те построения, которые обоснованы в планиметрии. Так, если требуется провести через данную прямую a произвольную плоскость, берут произвольную точку A вне прямой a (возможность выбора такой точки также постулируется) и считают, что искомая плоскость проведена через прямую a и точку A.

Рассмотрим задачу построения плоскости, проходящей через данную точку A перпендикулярно к данной прямой a.

Плоскость, проходящая через точку A, будет искомой, если в ней содержатся две пересекающиеся прямые, перпендикулярные к прямой a (признак перпендикулярности прямой и плоскости).

Отсюда проведем следующее построение:

а) $A \in a$ (рис. 86, *а*):

1) проводим через прямую a две различные плоскости β_1 и β_2;

2) в плоскостях β_1 и β_2 проводим через точку A перпендикуляры b_1 и b_2 к прямой a;

3) через b_1 и b_2 проводим плоскость α.

б) $A \overline{\in} a$ (рис, 86, *б*):

1) через точку A и прямую a проводим плоскость β_1;

2) в плоскости β_1 проводим через точку A прямую b_1, перпендикулярную к a;

3) через прямую a проводим плоскость β_2 ($\beta_2 \neq \beta_1$), а в ней через точку $C = b_1 \cap a$ — прямую b_2, перпендикулярную к a;

4) через b_1 и b_2 проводим плоскость α.

Доказывается, что $\alpha \perp a$ и что эта плоскость определена однозначно (задача имеет единственное решение).

3.2. Изображения (фигуры), полученного с помощью параллельного проектирования на плоскость чертежа, еще

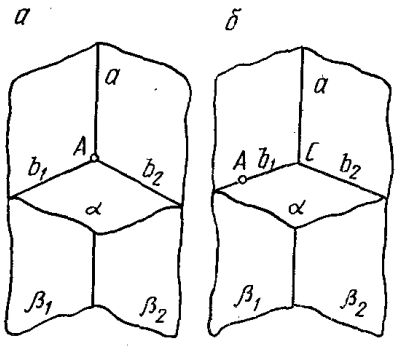


Рис. 86

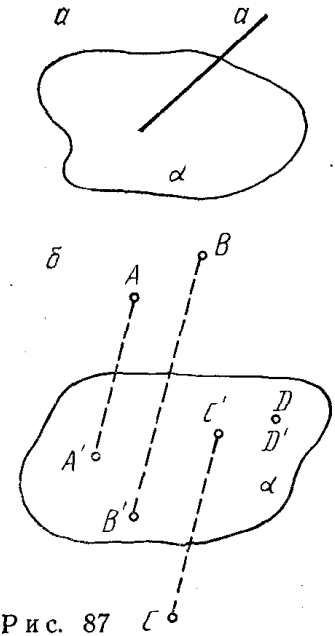


Рис. 87

недостаточно для выполнения на нем различных построений, связанных с этой фигурой.

Например, по изображению прямой и плоскости (рис. 87, *а*) мы не можем отыскать путем построения точку пересечения этой прямой и плоскости. Это изображение не является полным, не дает представления о взаимном расположении прямой a и плоскости α в пространстве. Такое изображение может получиться при любом расположении прямой и плоскости ($a \parallel \alpha$ или $a \cap \alpha = A$).

Чтобы получить проекционный чертеж, позволяющий конструктивно определить общие элементы изображенных прямых и плоскостей, т. е. решить на изображении так называемые *позиционные задачи,* достаточно задать, кроме изображения точек, прямых, плоскостей и вообще пространственных фигур на плоскости чертежа, изображения их проекций на некоторую плоскость, называемую *основной.*

Такой проекционный чертеж получается в результате двойного проектирования: точки A, B, C, D пространства проектируются на основную плоскость α, затем вместе с этой плоскостью, со своими проекциями на ней A', B', C', D' и проектирующими прямыми (AA', BB', CC', DD') проектируются на плоскость чертежа (рис. 87, *б*).

Точку пространства считают заданной на проекционном чертеже, если заданы изображение этой точки и изображение ее проекции на основную плоскость. *Прямую* считают

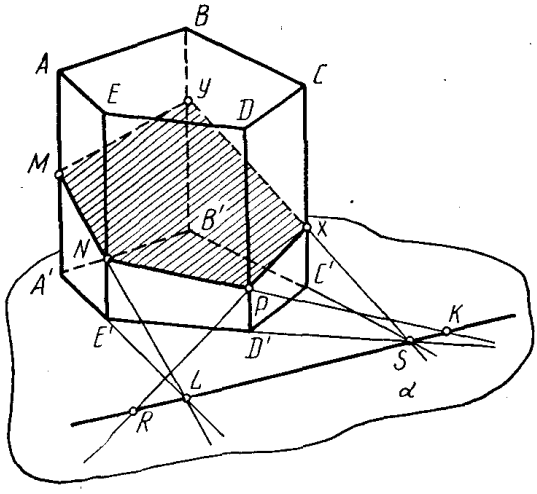


Рис. 88

заданной на проекционном чертеже, если заданы две ее точки или если заданы ее изображение и изображение ее проекции на основную плоскость. *Плоскость* считается заданной на проекционном чертеже, если заданы три точки этой плоскости, не лежащие на одной прямой, или прямая и точка вне ее, или две пересекающиеся прямые, или две параллельные прямые.

Если все точки, прямые и плоскости изображенной фигуры являются заданными на проекционном чертеже в указанном смысле, то такое изображение называется *полным* и можно на нем построением отыскать все непустые пересечения прямых и плоскостей изображенной фигуры, т. е. решать различные позиционные задачи.

Приведем в качестве примера решение задачи на построение сечения призмы плоскостью.

З а д а ч а. Построить сечение пятиугольной призмы плоскостью, заданной тремя точками, лежащими на боковых ребрах призмы.

Пусть дана призма $ABCDEA'B'C'D'E'$ и три точки M, N, P, лежащие соответственно на ребрах AA', EE', DD', (рис. 88).

Выберем плоскость $A'B'C'$ нижнего основания за основную плоскость α, а направление боковых ребер — за направление проектирования на основную плоскость. При таком выборе основной плоскости и направления проектирования изображение призмы является полным, т. е. все элементы призмы (грани, ребра и вершины) заданы на чертеже, что легко проверить. Так как изображение является полным, то требуемое в задаче построение осуществимо на чертеже.

Задача построения сечения сводится в нашем случае к отысканию точек пересечения плоскости MNP с боковыми ребрами (проектирующими прямыми) BB' и CC'.

Приведем символическую запись хода решения задачи:

1) $(L \in MN,\ \alpha)$ **и** $(K \in NP,\ \alpha) \Rightarrow (MNP \cap \alpha = KL)$;

2) $R \in C'D',\ KL$;

3) $(R \in C'D')$ **и** $(C'D' \subset C'CD) \Rightarrow (R \in C'CD)$;

4) $(R \in KL)$ **и** $(KL \subset MNP) \Rightarrow (R \in MNP)$;

5) $(P \in MNP,\ C'CD)$ **и** $(R \in MNP,\ C'CD) \Rightarrow (MNP \cap C'CD = PR)$;

6) $(X \in C'C,\ PR) \Rightarrow (X = MNP \cap C'C)$;

7) $S \in B'C',\ KL$;

8) $(S \in B'C')$ **и** $(B'C' \subset B'BC) \Rightarrow (S \in B'BC)$;

9) $(S \in KL)$ **и** $(KL \subset MNP) \Rightarrow (S \in MNP)$;

10) $(X \in MNP,\ B'BC)$ **и** $(S \in MNP,\ B'BC) \Rightarrow (XS = MNP \cap \cap B'BC)$;

11) $(Y \in XS,\ B'B) \Rightarrow (Y \in MNP,\ B'B)$.

Итак, $MNPXY$ — искомое сечение.

27. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

1. Содержание

1.1. Измерение геометрических величин (длин, площадей, объемов) — одна из важнейших тем школьного курса геометрии, имеющая прикладной характер. Необходимость измерения геометрических и физических величин часто появляется в задачах, возникающих в различных отраслях естествознания, техники, производства.

Вполне понятно, что школьные программы всегда уделяли серьезное внимание этой теме.

1.2. Программа 1981 г. (базисная) следующим образом определяет содержание темы по классам.

В I—III классах: примеры величин (длина, площадь, время, масса, стоимость); единицы их измерения; примеры зависимостей между величинами (путем, скоростью и временем; площадью и длинами сторон прямоугольника и т. п.).

В IV—V классах: примеры величин (длина, площадь, объем, градусная мера угла); единицы измерения длин, площадей, объемов и углов; масштаб; площадь прямоугольника; площадь прямоугольного треугольника; объем прямоугольного параллелепипеда; формулы длины окружности и площади круга.

В VI—VIII классах: понятие о площади; основные свойства площади; площадь прямоугольника, треугольника, параллелограмма, трапеции; отношение площадей подобных фигур; площадь круга и его частей; решение задач на вычисление неизвестных длин, углов и площадей.

В IX—X классах: понятие об объеме, основные свойства объема, объемы многогранников: прямоугольного параллелепипеда, призмы, пирамиды; объемы тел вращения: цилиндра, конуса, шара; площадь боковой и полной поверхностей цилиндра и конуса; площадь сферы.

1.3. Программа 1981 г. (базисная) предъявляет следующие требования к подготовке учащихся в области геометрических величин.

Учащиеся I—III классов должны научиться измерять простейшие величины и выполнять над ними соответствующие действия. Программа рекомендует основное внимание сосредоточить на выработке прочных навыков измерения величин, на овладении наиболее распространенными на практике единицами измерения величин.

Учащимся IV—V классов необходимо приобрести навыки измерения геометрических величин, научиться решать простейшие задачи на нахождение длин, площадей и объемов.

Учащиеся VI—VIII классов должны приобрести навыки измерения и вычисления длин, углов и площадей, применяемые для решения разнообразных геометрических и практических задач. Учащиеся должны также решать несложные задачи на нахождение величин, не сводящиеся к непосредственному применению одной формулы или теоремы.

Учащиеся IX—X классов должны уметь решать несложные задачи на нахождение длин, углов, площадей и объемов (в том числе задачи с практическим содержанием). При этом требуется не только умение довести решение до численного результата, но и умение перевести практическую задачу на язык геометрии и решить ее, приведя достаточно полное обоснование.

2. Величина и ее измерение

2.1. Величина — одно из основных понятий математики, возникшее в древности и подвергшееся в процессе развития математики ряду обобщений.

Общее понятие величины — непосредственное обобщение конкретных величин (длины, площади, объема, массы и т. д.), свойства которых сформулированы еще в «Нача-

лах» Евклида. Впоследствии эта величина получила название *положительной скалярной величины,* чтобы отличить ее от более общих понятий величины (векторной и др.). Говоря дальше «величина», мы будем иметь в виду именно скалярную положительную величину.

2.2. Интуитивно мы представляем себе, что величина может быть больше или меньше, две однородные величины (например, две длины или две массы) могут складываться, величину можно делить на произвольное натуральное число, ее можно измерить, причем под измерением обычно понимают сравнение данной величины с другой того же рода, принятой за единицу измерения. Однако сформулировать в математических терминах ответ на вопрос, что такое величина, совсем не просто. Школьное обучение, по крайней мере в рамках обязательной для всех программы, не дает и, по-видимому, не должно давать ответа на этот вопрос. В обучении школьников мы имеем дело с конкретными величинами, изучение которых хорошо иллюстрирует общее понятие величины при соответствующей постановке обучения.

Для правильной постановки обучения конкретным геометрическим величинам учитель должен иметь хотя бы представление об одном из возможных построений теории величины.

Приведем схему построения такой теории, полученную путем математизации эмпирически устанавливаемых свойств конкретных величин (заимствована у А. Н. Колмогорова).

2.3. Рассмотрим бесконечное множество B с введенным в нем отношением $<$ (меньше) и операцией $+$ (сложения), т. е.

$$(B, <, +),$$

которое назовем *системой однородных величин* (или *системой величин*, или *родом величин*). Элементы a, b, c, ..., или a_1, a_2, ... множества B назовем *однородными величинами* или *величинами одного рода.*

Система величин $(B, <, +)$ характеризуется следующими свойствами, которые могут быть приняты за исходные предложения (аксиомы) теории величины:

1) $\forall a, b$ $(a < b$ **или** $a = b$ **или** $b < a)$

(причем имеет место точно одно из трех соотношений);

2) $\forall a, b, c$ $(a < b$ **и** $b < c \Rightarrow a < c)$

(транзитивность отношения «меньше», а также «больше»,

которое может быть определено через «меньше», $a>b \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow b<a$);

3) $\forall a,\ b\ \exists! c\ (a+b=c)$

(замкнутость B относительно сложения);

4) $\forall a,\ b\ (a+b=b+a)$

(коммутативность сложения);

5) $\forall a,\ b,\ c\ (a+(b+c)=(a+b)+c)$

(ассоциативность сложения);

6) $\forall a,\ b\ (a+b>a)$

(монотонность сложения);

7) $\forall a,\ b\ (a>b \Rightarrow \exists! c\ (b+c=a))$

(возможность вычитания: $a-b=c$);

8) $\forall a \forall n \in N\ \exists b\ (nb=a)$

(возможность деления величины на натуральное число: $a:n=b$);

9) $\forall a,b\ \ \exists n \in N\ (a<nb)$

(аксиома Архимеда);

10) пусть даны две последовательности величин из B:

$$a_1<a_2<\ldots<\ldots;\ \ \ldots<\ldots<b_2<b_1,$$

причем для любой величины c при достаточно большом номере n

$$b_n-a_n<c,$$

т. е. члены последовательностей (a_n) и (b_n) неограниченно приближаются друг к другу. В таком случае существует единственная величина $x \in B$, которая больше всех a_n и меньше всех b_n, т. е. $\forall c\ \exists n \in N\ (b_n-a_n<c) \Rightarrow \exists! x \in B\ \forall n \in$ $\in N\ (a_n<x<b_n)$ (аксиома непрерывности).

Свойства 1—10 полностью определяют понятие системы положительных скалярных величин.

Если какую-нибудь величину $e \in B$ принять за *единицу измерения*, то всякая величина системы B однозначно представима в виде

$$a=\alpha e,$$

где α — положительное действительное число ($\alpha \in R^+$) — *мера* величины a при единице измерения e.

Меру a при единице измерения e обозначим через $m(a)$, т. е. если $a = \alpha e$, то $\alpha = m(a)$.

Мера обладает следующими свойствами:

а) m — функция с областью определения B и областью значения R^+, т. е. m отображает B на R^+;

б) $a < b \Rightarrow m(a) < m(b)$ (монотонность меры);

в) $m(a+b) = m(a) + m(b)$ (аддитивность меры);

г) $m(e) = 1$ (мера единицы измерения равна 1).

Перечисленные свойства полностью характеризуют меру m, существует единственная функция $B \longrightarrow R^+$, обладающая этими свойствами, а именно мера $m(a)$ величины a при единице измерения e.

Если e заменить через e', то получится новая мера $m'(a) = \alpha'$, причем, так как $m(a) = \alpha$, то связь между двумя мерами выразится так: $m'(a) = \alpha^{-1} m(a)$.

Перечисленные свойства общего понятия величины и меры величины находят применение (в явном или неявном виде) при изучении конкретных геометрических величин (длины, площади и объема) в школе.

3. Геометрические величины

3.1. Измерение геометрических величин (длины, площади, объема) изучается в школьном курсе дважды, на двух различных уровнях.

На первом, чисто экспериментальном, уровне в начальных классах учатся измерять длины отрезков, площади простейших плоских фигур и объемы простейших пространственных тел. На этом уровне не дается определений длины, площади и объема. Цель состоит в том, чтобы создать у учащихся ясные интуитивные понятия.

Методика изучения геометрических величин на первом, интуитивном, уровне достаточно хорошо разработана и широко освещена в литературе.

Рассмотрим некоторые вопросы методики изучения геометрических величин на втором уровне.

3.2. Прежде всего возникает вопрос о возможности и целесообразности построения в школьном курсе строгой теории измерения геометрических величин. По этому вопросу высказываются различные, порой диаметрально противоположные точки зрения. Между тем совершенно ясно одно: строгая теория измерения геометрических величин в школьном обучении наталкивается на серьезные трудности, и

вряд ли оправданы усилия и время, необходимые для преодоления этих трудностей. Это, разумеется, не означает отказ в школьном курсе от всякой теории измерения геометрических величин. Можно лишь заключить, что стремление к строгости не должно стоять на первом плане. Очевидно также, что в процессе обучения необходимо, по возможности, открыто указать на вынужденные логические пробелы, а не скрывать их от учащихся (в этом отношении обучение учащихся средних и старших классов должно отличаться от обучения учащихся младших классов, которые еще не в состоянии понять сущность логических пробелов).

Например, площадь многоугольника определяется как сумма площадей треугольников, на которые его можно разбить. Естественно возникает вопрос, получим ли мы то же самое число, если разобъем данный многоугольник на треугольники другим способом и сложим площади треугольников разбиения.

В школьном курсе обычно не доказывается теорема о независимости суммы площадей треугольников разбиения от способа разбиения, и, очевидно, она и не должна доказываться в школе. Но означает ли это, что мы должны скрывать от учащихся этот логический пробел? Очевидно, сообщение школьникам научных результатов без их доказательства, если они не могут быть доказаны в школьном курсе, приносит несомненно больше пользы, чем несостоятельные доказательства или умалчивание о том, что не может быть доказано на данном уровне.

3.3. «Школьная теория» измерения геометрических величин должна строиться таким образом, чтобы четко вырисовывалась общая схема. Прежде всего это относится к определению понятий «длина», «площадь», «объем». Повторение одной и той же схемы определения способствует обобщению, формированию такого представления: из аналогии вытекает, что эти понятия относятся к одному, более общему понятию, связывающему их. Раскрытие этой связи в процессе обучения способствует более глубокому пониманию и прочности знаний.

Каждое из трех понятий («длина», «площадь», «объем») определяется как вещественное число, удовлетворяющее условиям (а—г), которые характеризуют общее понятие меры множества, разумеется, в соответствующей формулировке (иногда для обозначения объектов, которые мы назвали соответственно длиной, площадью и объемом, применяются термины «мера длины», «мера площади», «мера объема»).

3.4. Можно наметить следующую схему теории измере-

ния длин отрезков: 1) определение длины отрезка как вещественного числа, удовлетворяющего условиям а — г; 2) описание процедуры измерения отрезка; 3) установление существования и единственности длины отрезка при данном выборе единицы измерения с использованием аксиомы Архимеда; 4) установление существования отрезка, длина которого при данном выборе единицы измерения равна любому, наперед заданному положительному числу с использованием аксиомы Кантора, геометрического эквивалента аксиомы непрерывности (10) (см. 2. 3, свойство 10).

Разъяснение учащимся старших классов сущности аксиомы Кантора (обычно не рассматриваемой в школьном курсе) не представляет особых трудностей. Это можно сделать именно в связи с установлением свойства 4.

Случай, когда наперед заданное число рациональное, не требует применения аксиомы Кантора и решается просто с помощью элементарного построения. Случай, когда данное число иррациональное, может рассматриваться в следующем аспекте. Пусть, например, вещественное число x выражается бесконечной десятичной непериодической дробью:

$$x = 2{,}313113111311113...$$

(здесь можно заметить закономерность следования цифр бесконечной непериодической дроби: после каждой последующей тройки число единиц увеличивается на одну).

Выберем на прямой начало O, направление и единицу измерения, т. е. введем на прямой систему координат. Если существует на прямой точка M, соответствующая числу x, то длина отрезка OM и будет равна этому числу.

Мы можем найти (известным способом) точки A_1 и B_1, соответствующие рациональным числам 2,3 и 2,4, т. е. приближенным значениям x с точностью до 0,1 с недостатком и с избытком соответственно. Если точка M существует, то $OA_1 < OM < OB_1$, т. е. точка M лежит внутри отрезка A_1B_1.

Мы можем также найти точки A_2 и B_2, соответствующие числам 2,31 и 2,32, т. е. приближенным значениям x с точностью до 0,01 с недостатком и с избытком.

Если точка M существует, то $OA_2 < OM < OB_2$, т. е. точка M лежит внутри отрезка A_2B_2.

Неограниченно продолжая этот процесс, мы получаем, что если точка M существует, то она лежит внутри каждого из отрезков бесконечной последовательности:

$$A_1B_1,\ A_2B_2,\ \ldots,\ A_nB_n,\ \ldots,$$

обладающей следующими свойствами: 1) каждый отрезок, кроме первого, лежит внутри предыдущего; 2) длины отрезков стремятся к нулю (или нет отрезка, лежащего внутри всех отрезков этой последовательности).

Существование точки, лежащей внутри всех отрезков этой последовательности, и постулируется аксиомой Кантора. («Если на прямой дана бесконечная последовательность отрезков

$$A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n, \ldots,$$

такая, что, во-первых, каждый отрезок лежит внутри предыдущего; во-вторых, нет отрезка, лежащего внутри всех отрезков этой последовательности, то существует точка, лежащая внутри всех отрезков этой последовательности».) Единственность этой точки непосредственно следует из аксиомы.

Приняв аксиому Кантора, мы находим искомую точку M, а следовательно, и отрезок OM, длина которого равна наперед заданному числу x.

3.5. В некоторой части теории измерения площадей и объемов аналогичны. Подчеркивание этой аналогии в процессе обучения — эффективное средство формирования понятия о методе построения этих теорий.

Начинающаяся с определений площади и объема аналогия продолжается в выборе единицы измерения (площадей — площадь квадрата, сторона которого равна единице длины; объемов — объем куба, ребро которого равно единице длины) и в последовательности и способе доказательств предложений.

Однако обнаруженная аналогия не распространяется на всю теорию. В качестве примера можно привести вопрос об отношении между понятиями равновеликости и равносоставленности в теории площадей многоугольников и теории объемов многогранников.

Хотя эти понятия определяются аналогично — два многоугольника (многогранника), имеющие равные площади (объемы), называются *равновеликими*; два многоугольника (многогранника), которые можно разложить на одинаковое число попарно конгруэнтных многоугольников (многогранников), называются *равносоставленными* — они не находятся в одинаковом отношении в теории площадей и в теории объемов. Если всякие равновеликие многоугольники равносоставлены, то этого нельзя сказать о равновеликих многогранниках.

Ввиду того что вопрос о равновеликости и равносостав-

ленности фигур почти не затрагивается в школьном курсе геометрии, а в данной области имеются задачи, вызывающие интерес у учащихся, можно рекомендовать эту тему для кружковых или факультативных занятий.

3.6. Теория измерения геометрических величин в школьном курсе значительно упрощается в некоторой своей части в связи с открывающейся возможностью вывода формул для объемов некоторых тел средствами интегрального исчисления с использованием понятия первообразной (см. гл. 23).

3.7. Допускаемое в обучении для упрощения языка отождествление меры величины с самой величиной (меры длины с длиной, меры площади с площадью, меры объема с объемом) вполне правомерно (например, говорят «длина отрезка — действительное число» вместо «мера длины...»).

Так как система $(R^+, <, +)$ действительных положительных чисел с отношением «меньше» и операцией сложения удовлетворяет свойствам 1—10 (см. 2. 3), то вполне закономерно положительные действительные числа называть величинами (длинами, площадями, объемами).

28. ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ МЕТОДЫ (ПРАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ)

1. Построение маленьких теорий

1.1. Для характеристики принятой модели обучения математике, в которой определенным образом сочетается система проблемного обучения с обучением познавательной деятельности, специфической для математики, мы уже приводили (см. гл. 7) примеры построения маленьких теорий.

Рассмотрим еще несколько примеров, которые покажут возможность разнообразных «учебных исследований» в школьном обучении математике, что позволяет говорить об исследовательских методах (а не об исследовательском методе) в обучении математике.

Данное исследование предшествует введению понятия касательной к окружности. Рассмотрим геометрическую ситуацию, изображенную на рис. 89. Математическое описание этой ситуации начинается с перечисления участвующих в ней объектов. Перед учащимися можно поставить первым следующий вопрос: что вы видите (что изображено) на рис. 89?

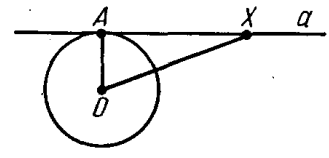


Рис. 89

На рис. 89 изображены: точки O, A, X; прямая a; окружность с центром O и радиусом r — окр (O, r); круг с центром O и радиусом r — кр (O, r), т. е. имеем множество объектов $M=\{O, A, X, a,$ окр $(O, r),$ кр $(O, r)\}$, состоящее из трех (выделенных) точек, прямой, окружности, круга.

Математическое описание рассматриваемой ситуации предполагает выявление свойств структуры, которую имеет множество M, наделенное отношениями принадлежности точки к прямой, окружности, перпендикулярности прямых, равно, больше, меньше между расстояниями, числами. Таким образом, речь идет об описании не множества M, а структуры $(M, \in, \perp, =, >, <)$.

С помощью наблюдений и опыта (некоторых измерений), т. е. эмпирически, обнаруживаются некоторые свойства, характеризующие эту структуру:

$$p_1\colon\ A \in a;$$
$$p_2\colon\ A \in \text{окр}\,(O,\ r);$$
$$p_3\colon\ a \cap \text{окр}\,(O,\ r) = A$$

(A — единственная общая точка прямой и окружности);

$$p_4 : |OA| = r;$$
$$p_5 : OA \perp a$$

(это одно из наиболее очевидных свойств структуры, изображенной на рис. 89);

$$p_6\colon\ X \in a;$$
$$p_7\colon\ X \overline{\in} \text{кр}\ (O,\ r);$$
$$p_8\colon\ |OX| > r;$$
$$p_9\colon\ |OA| = d\,(O,\ a)$$

($d\,(O,\ a)$ — расстояние от точки O до прямой a: $d\,(O,\ a) = \min\{|OX|\,|X \in a\}$);

$$p_{10}\colon\ X \neq A;$$
$$p_{11}\colon\ |AO| < |OX|;$$
$$p_{12}\colon\ A \in \text{кр}\,(O,\ r);$$
$$p_{13}\colon\ X \overline{\in} \text{окр}\,(O,\ r).$$

Множество $P=\{p_1, p_2, \ldots, p_{13}\}$ предложений, выражающих свойства структуры $(M, \in, \perp, =, >, <)$, и составляет математическое описание этой структуры с помощью того языка и понятийного аппарата, которыми уже владеют учащиеся к моменту ее рассмотрения.

Однако это описание с логико-математической точки

зрения несовершенно. Оно представляет собой логически не упорядоченный (не организованный) математический материал и еще не представляет собой теории.

Возникает проблема выявления логических связей между предложениями совокупности P, вычленения из этой совокупности логически независимых предложений, т. е. проблема логической организации математического материала (*ЛОММ*).

Наиболее очевидными являются логические связи между предложениями p_1, p_2, p_3, p_4 и p_{12}. Действительно, из p_3 непосредственно следуют p_1 и p_2:

$$p_3 \Rightarrow p_1 \text{ и } p_2\colon\ A = a \cap \text{окр}\,(O,\ r) \Rightarrow A \in a \text{ и } A \in \text{окр}\,(O,\ r).$$

Тем учащимся, которые затрудняются обнаруживать эти связи, можно задать такие вопросы: что означает p_3 — «точка A есть пересечение прямой a с окр $(O,\ r)$»; принадлежит ли точка A каждой из пересекающихся фигур; какие же из перечисленных предложений непосредственно следуют из p_3? Постановка этих вопросов вытекает из анализа и выявления возможных причин затруднений учащихся.

Если учесть определение окружности

$$\text{окр}\ \ (O,\ r) = \{Y|\ \ |OY| = r\},$$

становится очевидным следование

$$p_2 \Rightarrow p_4\colon\ A \in \{Y\,||\,OY\,| = r\} \Rightarrow |\,OA\,| = r.$$

Зная, что $p_3 \Rightarrow p_2$ и $p_2 \Rightarrow p_4$, получаем $p_3 \Rightarrow p_4$ (отношение следования транзитивно). Поскольку окружность — граница, а стало быть, часть круга, обнаруживаем, что $p_2 \Rightarrow p_{12}$: $A \in \text{окр}\,(O,\ r)$ и $\text{окр}\,(O,\ r) \subset \text{кр}\,(O,\ r) \Rightarrow A \in \text{кр}\,(O,\ r)$, а следовательно, и истинность $p_3 \Rightarrow p_{12}$.

По-видимому, некоторые учащиеся обнаружат и другие достаточно очевидные логические связи, например, что из p_7 следует p_{13}. Если же учащиеся будут затрудняться в обнаружении этой связи, то можно задать им такой вопрос: если бы точка X принадлежала окружности, то какой еще фигуре она бы определенно принадлежала?

Если ответ на этот вопрос вызывает затруднения, то можно задать такой: частью какой другой фигуры является окр (O, r)?

Наконец, приходим к заключению об истинности следования $X \in \text{окр}\ \ (O,\ r) \Rightarrow X \in \text{кр}\,(O,\ r)$. Приняв это предложение в качестве одной посылки, а в качестве другой p_7, т. е. отрицание предложения $X \in \text{кр}\,(O,\ r)$, заключаем о ложности

предложения $X \in \text{окр}(O, r)$ или об истинности его отрицания $X \overline{\in} \text{окр}(O, r)$, т. е. предложения p_{13} (здесь неявно применено правило контрапозиции: если из P следует Q, то из не-Q следует не-P).

По определению круга $|OX| \leqslant r \Leftrightarrow X \in \text{кр}(O, r)$, а отсюда (по правилу контрапозиции) следует, что

$$X \overline{\in} \text{кр}(O, r) \Rightarrow |OX| > r; \quad |OX| > r \Rightarrow X \overline{\in} \text{кр}(O, r),$$

т. е. имеют место следования $p_7 \Rightarrow p_8$ и $p_8 \Rightarrow p_7$ или равносильность $p_7 \Leftrightarrow p_8$.

Исходя из определения расстояния от точки до прямой и из свойства перпендикуляра, опущенного из точки на прямую, получаем $A \in a$ и $OA \perp a \Rightarrow |OA| = d(O, a)$, т. е. p_1 и $p_5 \Rightarrow p_9$.

При выявлении логических связей были использованы определения пересечения двух множеств, окружности, круга, подмножества, отрицание отношения $\leqslant$, расстояние от точки до прямой (пересечение двух множеств можно заменить пересечением двух фигур, подмножество — частью фигуры). Кроме того, в рассуждениях неявно использовались некоторые широко применяемые в математике правила следования (силлогизма, контрапозиции), которые могут быть предметом изучения на факультативных или внеклассных занятиях.

Выявленные (и некоторые другие явно выступающие) логические связи (например, p_4 и $p_8 \Rightarrow p_{11}$) позволяют заменить исходное множество P предложений, полученное в результате наблюдений и опыта, одним из следующих его подмножеств: $P_1 = \{p_3, p_5, p_6, p_7, p_{10}\}$, или $P_2 = \{p_3, p_5, p_6, p_8, p_{10}\}$, или $P_3 = \{p_3, p_6, p_7, p_9, p_{10}\}$, или $P_4 = \{p_3, p_6, p_8, p_9, p_{10}\}$.

Рассмотрим одно из этих множеств предложений (эквивалентных между собой в том смысле, что имеют одно и то же множество следствий P), например P_1. В данном случае опять возникают вопросы: являются ли предложения множества P_1 логически независимыми; нельзя ли вывести какое-нибудь из этих предложений из остальных и, разумеется, некоторых ранее уже известных геометрических предложений?

Нетрудно заметить, что из p_3, p_6, p_{10} следует p_7 или равносильное ему предложение p_8. Таким образом можно упростить множество предложений P_1, заменив его подмножеством $P_1' = \{p_3, p_5, p_6, p_{10}\}$.

Очевидно, что p_6 и p_{10} не следуют ни из p_3, ни из p_5, ни

из обоих этих предложений (X — заданная произвольная точка прямой a, отличная от A); их можно считать «локальными аксиомами».

Остается выяснить, нельзя ли вывести p_5 из p_3 или p_3 из p_5.

Исходя из p_3, получаем, что $X \in a$ и $X \neq A \Rightarrow |OX| > r$, т. е. p_6 и $p_{10} \Rightarrow p_8$, следовательно, p_3, p_6, $p_{10} \Rightarrow p_8$, и так как, кроме того, $p_3 \Rightarrow p_4$, то из p_3 получаем $X \in a$ и $X \neq A \Rightarrow$ $\Rightarrow |OA| < |OX|$, т. е. p_6, $p_{10} \Rightarrow p_{11}$, или

$$p_3,\ p_6,\ p_{10} \Rightarrow p_{11}. \qquad (1)$$

Но (1) равносильно $|OA| = d(O,\ a)$, а из этого следует $OA \perp a$, т. е. p_3, p_6, $p_{10} \Rightarrow p_5$. Если обратить наши рассуждения, получим p_5, p_6, $p_{10} \Rightarrow p_3$ (разумеется, некоторые учащиеся могут встретить затруднения при поиске доказательства. Поэтому перед учителем возникает задача организации и управления поиском доказательства, о которой шла речь в гл. 11).

Предложения p_6 и p_{10} входят в состав посылок при выводе p_5 из p_3 или p_3 из p_5 (точка X была включена с самого начала в рассматриваемую ситуацию для облегчения поиска доказательств).

Можно утверждать, что предложения p_3 и p_5 равносильны (при данном множестве посылок). Если p_3 принять за определение касательной к окружности, т. е. определить касательную к окружности как прямую, имеющую с окружностью только одну общую точку, то предложение p_5 будет теоремой, выражающей свойство касательной к окружности (касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания). Если же принять за определение *касательной к окружности* p_5 (*касательной к окружности* называется прямая, перпендикулярная к радиусу в конце его, принадлежащем окружности), то предложение p_3 будет теоремой, выражающей свойство касательной (касательная к окружности имеет с ней только одну общую точку).

Как видно, определение касательной к окружности появляется в конце проведенного исследования, связанного с математическим описанием рассматриваемой структуры. При этом выясняется возможность двух различных (эквивалентных) определений и соответствующих построений «маленькой теории» (касательной к окружности).

Совершенно очевидно, что усвоение учащимися фрагмента математической теории, в построении которого они

приняли активное участие, материала, являющегося результатом (в какой-то мере) самостоятельного исследования (организованного и управляемого учителем в процессе обучения), будет более глубоким и осознанным по сравнению с заучиванием материала по учебнику в традиционном изложении.

1.2. Рассмотрим другой вид исследования на примере изучения средней линии трапеции.

Учащиеся уже знакомы со средней линией треугольника и ее свойствами. Целесообразно, чтобы учащиеся использовали эти знания при изучении средней линии трапеции. Опишем два варианта построения процесса исследования. В обоих вариантах этот процесс включает создание проблемной ситуации, стимулирующей открытие учащимися свойств средней линии трапеции, поиск, открытие и построение доказательств этих свойств.

Вариант 1. Пусть M_1P_1 — средняя линия треугольника $A_1B_1D_1$ (рис. 90, *а*). Вспоминаем свойства средней линии треугольника:

$$M_1P_1 \parallel A_1D_1; \tag{1}$$

$$|M_1P_1| = \frac{|A_1D_1|}{2}. \tag{2}$$

Пусть в трапеции $ABCD$ (см. рис. 90, *б*) M и N — середины непараллельных сторон, т. е. $|AM| = |MB|$ и $|DN| = |NC|$, $[MN]$ — средняя линия трапеции $ABCD$. Вопрос о том, как можно сформулировать определение средней линии трапеции, не вызовет затруднений у учащихся. Они сами исправляют и уточняют некорректные формулировки.

Естественно, важно выяснить, какими свойствами обладает средняя линия трапеции. Весьма вероятно, что многие учащиеся из рисунка увидят параллельность средней линии основаниям трапеции. Если же школьники будут затрудняться в выдвижении гипотезы, то надо обратить их внимание на свойства средней линии треугольника.

После того как будет выдвинута гипотеза о параллельности средней линии трапеции ее основаниям, следует вы-

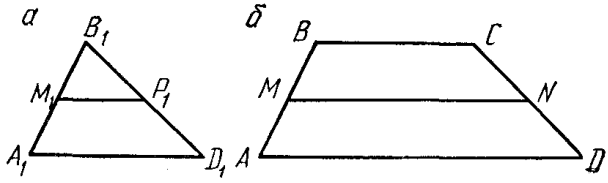


Рис. 90

яснить, какое предложение достаточно доказать для подтверждения этой гипотезы. Если некоторые учащиеся укажут предложение «$MN \| AD$ и $MN \| BC$», то можно задать им такой вопрос: необходимо ли доказывать параллельность средней линии обоим основаниям трапеции?

Вероятно, некоторые ученики догадываются, что достаточно доказать параллельность средней линии одному из оснований, т. е. для подтверждения выдвинутой гипотезы достаточно доказать предложение «$MN \| AD$» или предложение «$MN \| BC$».

Второе свойство средней линии трапеции не подсказывается рисунком. Можно обратить внимание учащихся на то, что мы выдвинули гипотезу о наличии свойства средней линии трапеции, аналогичного свойству (1) средней линии треугольника. Естественно возникает вопрос, не обладает ли средняя линия трапеции свойством, аналогичным свойству (2) средней линии треугольника, т. е. вопрос о связи длины средней линии с длинами оснований. Маловероятно, что эта связь будет правильно угадана учащимися. Мы не должны опасаться их ошибочных предположений. По существу во всяком поиске в какой-то мере применяется метод проб и ошибок, и мы должны давать учащимся возможность ошибаться, а затем приводить их к пониманию допущенной ошибки.

Если по неправильной аналогии ученик выскажет гипотезу, что средняя линия трапеции (как и средняя линия треугольника) равна половине нижнего основания, то его нетрудно будет привести к построению опровержения собственной гипотезы (достаточно предложить изменить длину одного верхнего основания трапеции, при этом обнаружится, что меняется и длина средней линии, хотя длина нижнего основания не изменяется).

Для приближения учащихся к открытию второго свойства средней линии трапеции можно задать им такой вопрос: нельзя ли образовать в трапеции какие-нибудь треугольники, чтобы связать среднюю линию трапеции со средней линией треугольника?

По-видимому, ученики предложат провести какую-нибудь из диагоналей трапеции. Проведя, допустим, диагональ BD (рис. 91) и обозначив через P точку пересечения ее со средней линией MN, некоторые учащиеся будут утверждать, что $[MP]$ — средняя линия треугольника ABD, а $[PN]$ — средняя линия треугольника BCD, и сразу же «докажут» параллельность средней линии трапеции ее основаниям, а также откроют и «докажут» второе свойство средней линии:

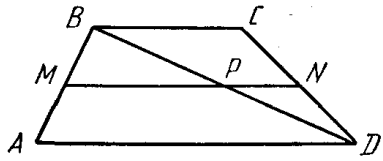


Рис. 91

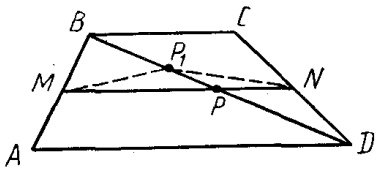


Рис. 92

так как $|MP| = \frac{1}{2}|AD|$ и $|PN| = \frac{1}{2}|BC|$, то $|MN| = |MP| + |PN| = \frac{1}{2}(|AD| + |BC|)$.

Возможно, некоторые ученики сами заметят существенный пробел в этих рассуждениях и скажут, что все это верно, если мы докажем, что P — середина диагонали BD. Если же они этого не заметят, то можно поставить такие вопросы: на чем основано утверждение, что $[MP]$ — средняя линия треугольника ABD, а $|PN|$ — средняя линия треугольника BCD; что называется средней линией треугольника; что надо доказать, чтобы обосновать утверждение «$[MP]$ — средняя линия треугольника ABD и $[PN]$ — средняя линия треугольника BCD»?

С помощью таких вопросов выясняется, что для подтверждения высказанной гипотезы достаточно доказать, что $|BP| = |PD|$. Рассуждая дальше, по-видимому, следует предположить, что P не есть середина отрезка BD. В данном случае косвенное доказательство (от противного) возникает как естественный ход мыслей в процессе исследования.

Возможно, кто-то из учеников догадается провести через точку M прямую, параллельную основанию, и сможет доказать, что она проходит через середины отрезков BD и CD. В таком случае получится прямое доказательство (приведенное в учебнике под ред. А. Н. Колмогорова), но оно менее естественно.

Рассмотрим косвенное доказательство. Из предположения, что $|BP| \neq |PD|$, следует, что на отрезке BD существует точка P_1, отличная от P ($P_1 \neq P$), и такая, что $|BP_1| = |P_1D|$, т. е. P_1 — середина $[BD]$ (рис. 92).

Из этого допущения учащиеся получат ряд следствий: $[MP_1]$ — средняя линия треугольника ABD; $[P_1N]$ — средняя линия треугольника BCD; следовательно, $MP_1 \| AD$ и $P_1N \| BC$, и так как $BC \| AD$, то и $P_1N \| AD$.

Обращаем внимание учащихся на два полученных следствия: $MP_1 \| AD$ и $P_1N \| AD$.

Возможно, некоторые учащиеся заметят, что через точку P_1 проведены две различные прямые MP_1 и P_1N, параллельные одной прямой AD, что противоречит аксиоме параллельных. Если они на это не обратят внимания, то можно поставить следующие вопросы: сколько прямых, параллельных AD, проведено через точку P_1; на чем основано утверждение, что прямые MP_1 и P_1N различны?

Таким образом, предположение о том, что середина отрезка BD отлична от точки P, приводит к противоречию (с аксиомой параллельных). Следовательно, это предположение ложно, а его отрицание $(P_1=P)$ истинно.

Теперь учащиеся сами сформулируют теорему, выражающую свойства средней линии трапеции, и построят ее доказательство, которое по существу уже открыто ими, разумеется, с помощью учителя (при поиске прямого доказательства, возможно, придется приблизить учащихся к первому шагу (обычно наиболее трудному в прямых доказательствах) с помощью таких (подсказывающих) вопросов: какую прямую следует провести через середину M отрезка AD, чтобы быть уверенным, что она пройдет и через середину отрезка BD; на основании какой теоремы это можно утверждать?).

Целесообразно продолжить исследование с целью выяснения, не являются ли установленные свойства средней линии характеристическими свойствами трапеции, т. е. свойствами, выделяющими подкласс трапеции из класса четырехугольников. Можно попробовать выяснить это для каждого из двух свойств в отдельности.

Для первого свойства это очевидно: если отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон (непараллельных), параллелен двум другим сторонам четырехугольника, то этот четырехугольник — трапеция ($MN \parallel AD$ и $MN \parallel BC \Rightarrow AD \parallel BC$).

В данном случае возможны лишь затруднения в формулировке обращения первого свойства. В таком случае целесообразно преобразовать формулировку первой части доказанной теоремы «средняя линия трапеции параллельна ее основаниям», представив ее в виде условного высказывания с использованием определения средней линии: *если четырехугольник — трапеция, то отрезок, соединяющий середины двух непараллельных сторон, параллелен двум другим ее сторонам (основаниям)*. При такой формулировке легко получить обратное предложение: *если в четырехугольнике отрезок, соединяющий середины двух непарал-*

лельных сторон, параллелен двум другим его сторонам, то этот четырехугольник — трапеция.

В трапеции средняя линия соединяет середины двух противоположных непараллельных сторон, в формулировке же обратного предложения слово «противоположных» опущено, поэтому здесь уместен такой вопрос, надо ли включить это слово в формулировку обратного предложения.

Если предложить учащимся графически изобразить случай, когда отрезок соединяет середины двух смежных сторон четырехугольника, то рисунок подскажет им, что не выполняется следующее условие: отрезок, соединяющий середины двух смежных сторон четырехугольника, не может быть параллельным двум другим его сторонам. Таким образом, обратное предложение сформулировано правильно.

Истинность обращения второго свойства средней линии трапеции менее очевидна. Возникает вопрос: если отрезок, соединяющий середины двух противоположных непараллельных сторон четырехугольника, равен полусумме двух других его сторон, то будет ли этот четырехугольник трапецией? Можно предположить, что такой четырехугольник — трапеция, т. е. что предложение

$$|AM| = |MB| \text{ и } |DN| = |NC| \text{ и } |MN| = \frac{|BC| + |AD|}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow BC \parallel AD$$

истинно (является теоремой) (см. рис. 92).

Доказательство этой обратной теоремы подсказывает исследование свойств средней линии трапеции.

Вероятно, некоторые учащиеся догадаются провести диагональ BD, рассмотреть треугольники ABD и BCD и, заметив, что если P — середина диагонали, получат доказательство параллельности BC и AD.

Таким образом, остается доказать, что $|BP| = |PD|$. Допустим, что это не так. Следовательно, существует на $[BD]$ точка P_1 $(P_1 \neq P)$, такая, что $|BP_1| = |P_1D|$.

Если ученики не догадаются идти по такому пути, им можно задать вопросы, аналогичные поставленным при поиске доказательства первого предложения. Дальнейший ход доказательства, приведение к противоречию, существенно отличается от предыдущего.

В случае затруднений целесообразно обратить внимание учеников на то, что при доказательстве предложения, обратного первой части теоремы о свойствах средней линии трапеции, мы ссылались на первое свойство средней линии треугольника. Можно предполагать, что при доказательст-

ве предложения, обратного второй части, надо использовать второе свойство средней линии треугольника. Исходя из этого свойства, учащиеся получат:

$$|MP_1| + |P_1N| = \frac{1}{2}(|BC| + |AD|).$$

Но так как $P_1 \overline{\in} MN$, то $|MP_1| + |P_1N| > |MN| = \frac{1}{2} \times$ $\times (|BC| + |AD|)$, т. е. $|MP_1| + |P_1N| > \frac{1}{2}(|BC| + |AD|)$.

Получаем противоречие:

$$|MP_1| + |P_1N| = \frac{1}{2}(|BC| + |AD|); \; |MP_1| + |P_1N| > \frac{1}{2} \times$$
$$\times (|BC| + |AD|),$$

которое доказывает теорему: *если отрезок, соединяющий середины двух противоположных непараллельных сторон четырехугольника, равен полусумме двух других его сторон, то этот четырехугольник — трапеция.*

Здесь, естественно, возникают вопросы, останется ли данное предложение теоремой, если в его формулировке опустить слово «непараллельных»; нельзя ли построить четырехугольник, который не является трапецией, хотя в нем отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон, параллелен двум другим его сторонам?

Учащиеся найдут контрпример — параллелограмм.

Вариант 2. Неудачная гипотеза о том, что средняя линия трапеции равна половине нижнего основания, приводит к другому предположению, а именно: длина средней линии трапеции определенным образом зависит от длин обоих ее оснований.

Возникает идея образовать треугольник, средняя линия которого совпала бы со средней линией трапеции $ABCD$, а основание было бы связано с обоими основаниями трапеции.

Возможно, некоторые учащиеся догадаются соединить точки B и N, а затем продолжить BN до пересечения с пря-

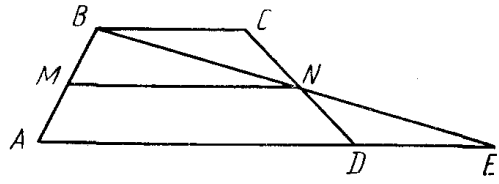


Рис. 93

мой AD ($BN \cap AD = E$). Если никто этого не сделает, можно предложить выполнить дополнительное построение, а затем поставить такие вопросы: в каком отношении находятся треугольники BCN и NDE (рис. 93); в каком отношении находятся отрезки BC и DE; чему равно основание треугольника ABE; чем является средняя линия трапеции для треугольника ABE; откуда следует, что $|BN| = |NE|$? Постепенно, шаг за шагом, строится доказательство.

2. Исследование в процессе решения задач

2.1. Обучение «через задачи» предполагает, в частности, тщательный отбор задач, их группировку в определенные последовательности, что позволяет построить процесс решения аналогично процессу исследования. При этом выявляются возможности обобщения задач, формулировки и решения новых, получения нового, порой неожиданного теоретического результата.

Приведем пример. Предложим учащимся следующие однотипные задачи: изобразить на координатной плоскости множества точек

$$E_1 = \{(x, y) \mid 3x + 4y \leqslant 12\};$$
$$E_2 = \{(x, y) \mid 2x + y \leqslant 4\};$$
$$E_3 = \{(x, y) \mid x \geqslant 0\};$$
$$E_4 = \{(x, y) \mid y \geqslant 0\}.$$

Сначала эти множества точек изображаются на различных рисунках (рис. 94, *а* — *г*), а затем они переносятся на один (рис. 94, *д*).

Возникает вопрос, что представляет собой множество E (четырехугольник, образовавшийся на рис. 94, *д*). Этот вопрос, по-видимому, не вызовет затруднений. В противном случае его можно сформулировать так: как связано множество E с множествами E_1, E_2, E_3, E_4? Записываем

$$E = E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4.$$

«Характеристическое свойство» для множества E из заданных характеристических свойств E_1, E_2, E_3, E_4 выразим так: $E = \{(x, y) \mid 3x + 4y \leqslant 12$ **и** $2x + y \leqslant 4$ **и** $x \geqslant 0$ **и** $y \geqslant 0\}$, т. е. E — множество решений системы неравенств

$$\left.\begin{aligned} 3x + 4y &\leqslant 12, \\ 2x + y &\leqslant 4, \\ x \geqslant 0,\ y &\geqslant 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

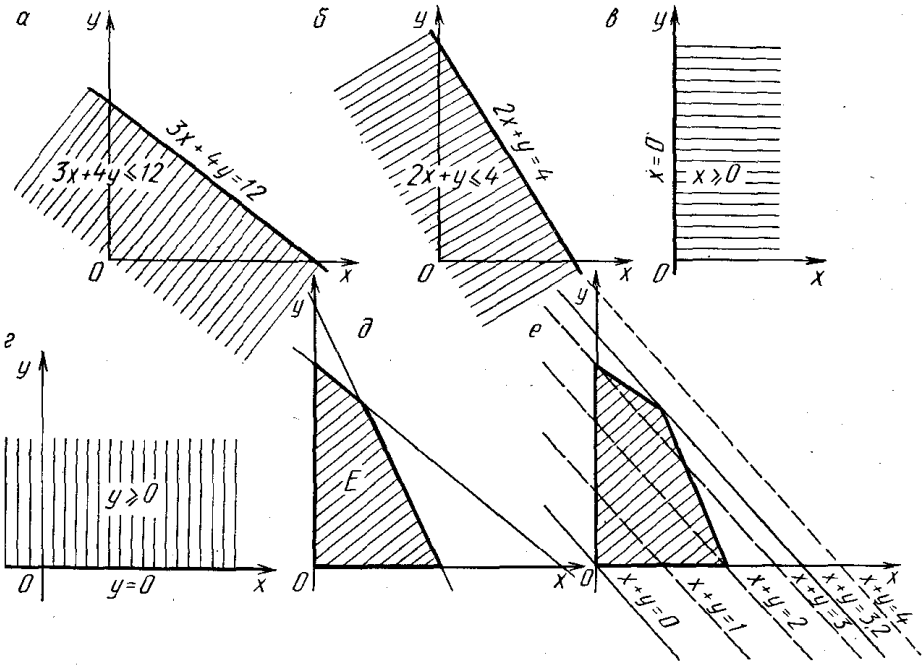


Рис. 94

Теперь рассмотрим следующую задачу: изобразить подмножество E, на котором сумма $x+y$ равна 1; 2; 3; 4. По существу здесь мы получили еще одну серию однотипных задач: найти пересечение $E \cap \{(x, y) \mid x+y=a\}$, где $a=1, 2, 3, 4$. Проводим параллельные прямые $x+y=a$, где $a=1, 2, 3, 4$ (см. рис. 94, *е*), и обнаруживаем, что $E \cap \{(x, y) \mid x+y=4\}=\varnothing$.

Теперь, естественно, возникает вопрос: какие значения может принимать сумма $x+y$ на множестве E? Как видно из рис. 94, *е*, наибольшей эта сумма будет в вершине четырехугольника, удовлетворяющей системе ($3x+4y=12$ и $2x+y=4$), т. е. $x+y=0{,}8+2{,}4=3{,}2$. При этом наименьшей — в вершине 0. Таким образом, на множестве E $0 \leqslant x+y \leqslant 3{,}2$.

Итак, наибольшее и наименьшее значения сумма $x+y$ принимает на границе четырехугольника. Чтобы доказать закономерность этого, выясним, чем отличаются точки границы от внутренних точек многоугольника. Предлагаем учащимся в произвольном многоугольнике F (рис. 95) отметить несколько точек, лежащих на границе (A, B), и несколько внутренних точек (M, P).

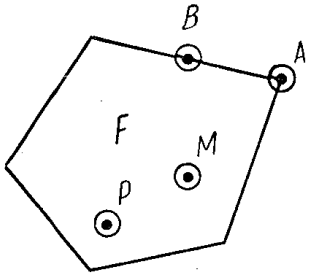


Рис. 95

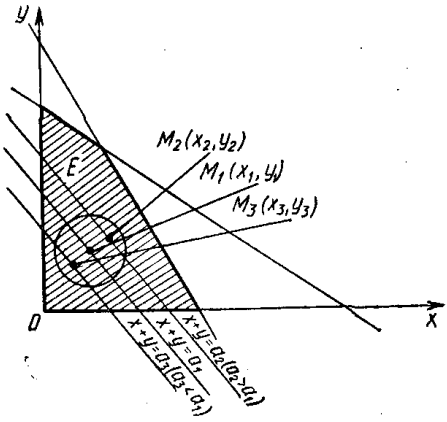


Рис. 96

Чтобы приблизить учащихся к открытию различия между граничными и внутренними точками, можно поставить такие вопросы: все ли точки внутри окружности произвольного радиуса с центром в граничной точке принадлежат многоугольнику F; всегда ли можно провести такую окружность для внутренней точки с центром в этой точке, чтобы внутри ее лежали только точки многоугольника?

Таким образом, постепенно выясняется, в чем состоят характеристические свойства граничных и внутренних точек многоугольника.

Теперь можно определить, почему наибольшее и наименьшее значения сумма $x+y$ принимает на границе четырехугольника, а не в его внутренних точках? Выясняем, что класс уравнений $x+y=a$, где $a \in R$, описывает пучок параллельных прямых, так как угловые коэффициенты всех этих прямых равны -1.

Пусть какая-нибудь из этих прямых, например $x+y=a_1$, проходит через внутреннюю точку $M_1(x_1, y_1)$ четырехугольника E (рис. 96). Тогда на основании характеристического свойства внутренних точек можно провести окружность с центром M_1, внутри которой лежат только внутренние точки E. Выберем две точки внутри окружности — $M_2(x_2, y_2)$, так, чтобы $x_2>x_1$ и $y_2>y_1$, и $M_3(x_3, y_3)$, так, чтобы $x_3<x_1$ и $y_3<y_1$ (это всегда возможно). Тогда $x_2+y_2=a_2>a_1$ и $x_3+y_3=a_3<a_1$ (через M_2 проходит прямая пучка $x+y=a_2$, а через M_3 — прямая пучка $x+y=a_3$).

Таким образом, если сумма $x+y$ принимает во внутренней точке E (например, в точке M_1) некоторое значение a_1, то это значение не может быть ни наибольшим, ни наименьшим.

Если же прямая $x+y=c_1$ имеет с E общую точку (x_0, y_0), лежащую на границе, то это означает, что либо для $c>c_1$, либо для $c<c_1$ не будет общих точек прямой $x+y=c$ с многоугольником E. Отсюда следует, что c_1 — наибольшее или наименьшее значение суммы $x+y$ на множестве E.

Как видно, приведенный пример охватывает серию задач, подготавливающих, учащихся к усвоению в дальнейшем геометрического метода решения задач линейного программирования для простейшего случая двух переменных. Кроме того, сам процесс решения обучает элементам исследовательской деятельности.

29. ЭЛЕМЕНТЫ ИНФОРМАТИКИ В ШКОЛЬНОМ ОБУЧЕНИИ

1. Цели, предпосылки, проблемы

1.1. Основные направления реформы общеобразовательной и профессиональной школы предусматривают вооружение учащихся знаниями и навыками использования современной вычислительной техники, обеспечение широкого применения компьютеров в учебном процессе, создание для этих целей специальных школьных и межшкольных кабинетов.

В постановлении ЦК КПСС и СМ СССР «О дальнейшем совершенствовании общего и среднего образования молодежи и улучшении условий работы общеобразовательной школы» говорится о необходимости организовать в старших классах общеобразовательных школ, профессионально-технических училищах, средних специальных учебных заведениях изучение основ электронно-вычислительной техники с тем, чтобы привить учащимся навыки пользования компьютерами и вооружить их знаниями о широком применении этой техники в народном хозяйстве. Постановлением предусмотрено проведение исследования психолого-педагогических проблем, связанных с введением компьютеров в учебный процесс общеобразовательных школ.

Всеобщая «компьютерная грамотность» учащихся, по выражению академика А. П. Ершова,— необходимая предпосылка технического перевооружения народного хозяйства СССР на основе вычислительной техники. Такая перестройка требует большого числа квалифицированных специалистов для создания и эксплуатации новой техники, автоматизированных производств с применением компьютеров, роботов, микропроцессорных средств и гибких технологий.

Проблема введения компьютеров в школьное обучение имеет два аспекта: *общеобразовательный*, касающийся всех учащихся, т. е. вооружение школьников знаниями и умениями, которыми должен владеть каждый человек, независимо от того, на каком рабочем месте он трудится, и *профессиональный*, касающийся не всех учащихся, т. е. подготовка в порядке профессионального обучения специалистов по микропроцессорной технике.

В общеобразовательном аспекте речь идет об изучении всеми учащимися необходимых элементов информатики. С 1985/86 учебного года во всех школах введен курс основы информатики и вычислительной техники.

1.2. *Информатика* совсем недавно оформилась в виде самостоятельной научной дисциплины. Предмет ее составляют исследования структуры информации, способов ее представления и переработки в различных устройствах, в том числе в ЭВМ. Основным компонентом информатики является программирование — наука о методах формулирования и решения задач с помощью ЭВМ.

Изучение информатики способствует формированию *важных умений и навыков, значение которых выходит* далеко за рамки области использования компьютеров, а именно: умений планировать действия, необходимые для достижения цели (заданной) при помощи фиксированного набора средств; описывать объекты и системы, участвующие в решении задачи, средствами заданного языка; организовывать поиск информации, необходимой для решения поставленной задачи; анализировать сообщения, их расчленения на части, наиболее удобные для восприятия (человеком или машиной), а также навыков своевременного обращения к ЭВМ, взаимодействия с ЭВМ.

Перечисленные и некоторые другие умения и навыки, вырабатываемые при изучении информатики, определяют своеобразный стиль мышления, плодотворность которого проявляется в самых различных отраслях деятельности человека.

1.3. Неправомерно считать, что внедрение в школьное обучение элементов информатики, предусмотренное реформой, будет осуществляться на пустом месте, без всякой к этому подготовки.

В 1959/60 учебном году в школе № 425 (ныне школа № 444) Москвы был впервые организован девятый класс с производственным профилем «вычислитель-программист». Инициатором создания этого класса был член-корреспондент АПН СССР С. И. Шварцбурд.

Внедрение указанной математической специализации в среднюю школу, вызванное самой жизнью, в дальнейшем приняло массовый характер. В настоящее время трудно назвать какой-нибудь областной центр страны, где бы не были школы с углубленным изучением математики, попрежнему ориентированные на подготовку вычислителей-программистов, хотя не всегда ставится цель дать учащимся профессиональную подготовку в этой области. Там, где имеются необходимые условия (учебные вычислительные центры или вычислительные центры различных организаций или производств, выделяющие время для обучения школьников), учащиеся получают не только теоретическую, но и хорошую практическую подготовку по программированию и работе на ЭВМ, сдают экзамены и получают квалификацию вычислителя-программиста определенного разряда.

В связи с реализацией реформы школы можно утверждать, что необходимые условия для обучения учащихся работе на ЭВМ значительно улучшатся. Опыт работы школ с углубленным изучением математики создал важные предпосылки для модернизации обучения и включения элементов информатики в обучение всех учащихся.

Большая и плодотворная научно-педагогическая деятельность по разработке и экспериментальной проверке системы «школьной информатики», начатая примерно четверть века назад по инициативе члена-корреспондента АН СССР А. А. Ляпунова, интенсивно продолжается в настоящее время в СО АН СССР. Созданная при ВЦ СО АН СССР группа школьной информатики организовала заочную школу программирования и с 1979 г. ведет в журнале «Квант» раздел «Искусство программирования».

«Школьная информатика» (приспособленные для школьного обучения элементы информатики) — научное направление, возникшее и развивающееся на стыке ряда теоретических и прикладных научных дисциплин, таких, как педагогика и системное программирование, психология, логика и радиоэлектроника.

В Новосибирске действует научно-методологический семинар (научный руководитель академик А. П. Ершов) «ЭВМ и учебный процесс», уделяющий много внимания методике школьного преподавания программирования, связи информатики и других школьных дисциплин, в первую очередь математики.

Исследования проблем, связанных с введением в школьное обучение элементов информатики, проводятся и в других научных центрах страны.

1.4. В связи с внедрением элементов информатики возникают три класса проблем: технического, математического и учебно-методического обеспечения.

Проблемы *технического обеспечения* состоят в поиске экономичных устройств для использования их в школьном обучении. Вычислительная машина, обслуживающая школу, по мнению новосибирских специалистов, должна обладать двумя важнейшими качествами (кроме того, что она должна быть не дорогой): иметь «диалоговый режим» работы, при котором общение учащихся с машиной происходило бы в темпе, определяемом возможностями школьника, и допускать коллективное пользование, т. е. чтобы в любой момент с машиной мог работать не один, а несколько учащихся.

К проблемам математического обеспечения относится, в частности, выбор языка программирования. Группа школьной информатики ВЦ СО АН СССР придерживается мнения, что известные алгоритмические языки, используемые в практике современного программирования (АЛГОЛ, КОБОЛ, ФОРТРАН, АПЛ и др.), непригодны для школьного обучения. Этой группой разработаны и экспериментально проверены два специализированных (для школьного обучения) языка: учебный язык РОБИК, ориентированный на младших школьников, и учебно-производственный язык РАПИРА для старших школьников.

В пробном учебнике по основам информатики и вычислительной техники принят язык БЕЙСИК, получивший в последнее время широкое распространение в практике обучения программированию.

1.5. Формирование «компьютерной грамотности» учащихся является задачей не одного учебного предмета основ информатики и вычислительной техники. Этот предмет направлен на изучение основ одного из алгоритмических языков, формирование практических умений программировать на этом языке, освоение навыков работы за дисплеем ЭВМ, ознакомление со строением ЭВМ и принципами действия основных его элементов.

Важную роль в формировании «компьютерной грамотности» должен играть школьный курс математики, содержащий пропедевтику и научную базу программирования. Главным образом это касается дальнейшего развития алгоритмической линии в его содержании и в методике обучения. Именно в курсе математики должно формироваться интуитивное понятие алгоритма и представление об его основных свойствах, представление о возможности автомати-

зации различных видов алгоритмической деятельности человека, т. е. деятельности, выполняемой человеком в соответствии с определенными алгоритмами.

Таким образом, речь идет не только о новом школьном предмете информатики, но и о совокупности тех основных понятий, идей и методов, которую информатика может привнести в различные школьные предметы, в частности в математику. Особый интерес представляет и обратный процесс, а именно: применение методики обучения математике, способствующей подготовке учащихся к усвоению информатики и представляющей своеобразную пропедевтику идей и методов последней.

2. Пропедевтика информатики в школьном обучении математике

2.1. Умения и навыки, а также операционный стиль мышления, формируемые и развиваемые под влиянием изучения информатики, могут частично вырабатываться и в традиционных разделах школьного курса математики при условии применения целенаправленной методики, использующей некоторые новые для школьного обучения идеи и методы, свойственные информатике. В ряде глав настоящего пособия была описана подобная методика обучения.

Приведем несколько примеров.

1. В главе 13 рассматриваются такие вопросы, как переменная, термы и формулы, современный математический язык в школьном обучении. Принятая трактовка понятия переменной подготавливает к понятию переменного поля синтаксической диаграммы. Тот же пример — форма справки с пустыми местами — приводится и в тексте второго урока заочной школы программирования (Квант, 1979, № 11, с. 54) для иллюстрации понятия переменного поля.

2. В главе 12 разъясняется точный смысл логических связок «не», «и», «или». Это способствует не только правильному определению истинностных значений предложений, сконструированных с помощью этих логических связок, но и подготавливает учащихся к пониманию работы функциональных блоков, из которых строятся основные узлы процессоров. Разумеется, для решения задач анализа и синтеза функциональных схем этих узлов нужны и знания некоторых элементов булевой алгебры.

3. В главе 10 рассматривается операторно-логическая структура алгоритмов и их представление в виде схем. Предлагается широко использовать в школьном обучении

наглядную и точную форму представления алгоритмов. Это подготовит учащихся к изучению схем программ.

При традиционном изучении в школе различных алгоритмов используются, главным образом, формулы (если они имеются) или словесные предписания, не расчленяющие процесс решения на шаги и не указывающие условные передачи управления.

Например, способ последовательного деления (алгоритм Евклида) для нахождения наибольшего общего делителя (НОД) двух чисел описывается примерно так: пусть дана пара чисел (a, b), где $a \geqslant b$. Делим a на b. Если остаток $r_1 = 0$, то НОД $(a, b) = b$. Если же $r_1 \neq 0$, то делим b на r_1. Если остаток $r_2 = 0$, то НОД $(a, b) = r_1$. Если же $r_2 \neq 0$, то делим r_1 на r_2. Если $r_3 = 0$, то НОД $(a, b) = r_2$ и т. д. Так как $r_1 > r_2 > \ldots > r_n \geqslant 0$, дойдем до какого-нибудь $r_n = 0$. Тогда НОД $(a, b) = r_{n-1}$.

В этом описании не выявлен циклический характер процесса, многократно повторяется одно и то же действие (деление) над определенным (закономерным) образом измененными данными.

Предписание в современном стиле выглядит следующим образом:

Указание 1. Делить a на b. Если остаток $r = 0$, то перейти к указанию 3. В противном случае — к указанию 2.

Указание 2. Положить a равным b и b — равным r. Перейти к указанию 1.

Указание 3. Результат: НОД $(a, b) = b$. Конец.

Это предписание точно переводится в схему, изображенную на рис. 97.

4. В главе 8 булева алгебра приводится как пример, на

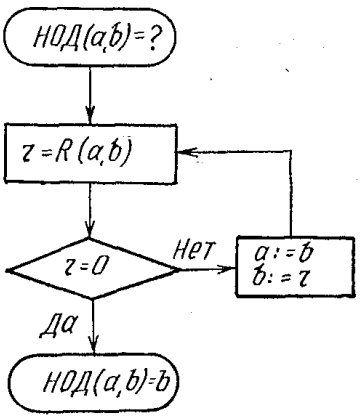


Рис. 97

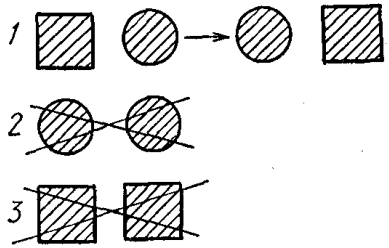


Рис. 98

котором удобно показать сущность аксиоматизации, включая возможность различных интерпретаций (моделей) одной теории (алгебры высказываний, алгебры контактных схем). Можно также показать, по крайней мере на факультативных занятиях, применение булевой алгебры к анализу и синтезу функциональных схем узлов процессора (например, одноразрядного сумматора на три входа).

Имеющийся опыт изучения элементов булевой алгебры на факультативных занятиях в старших классах позволяет утверждать, что минимальный материал, необходимый для содержательного рассмотрения указанных приложений, может быть доступно изложен не только для части учащихся на факультативных занятиях, но и для всех учащихся.

2.2. Имеется и некоторый весьма интересный опыт ранней пропедевтики программирования при экспериментальном обучении детей шестилетнего возраста с помощью специально разработанных дидактических игр, моделирующих работу «машины Поста», изложенный в учебном пособии «Практикум по методике начального обучения математике» (Мн., 1984).

Идею о возможности обучения учащихся начальных классов на «машине Поста» высказал профессор МГУ В. А. Успенский в предисловии к брошюре «Машина Поста»: «Автор надеется, что предлагаемая брошюра в какой-то мере сможет способствовать продвижению таких понятий, как «алгоритм», «универсальная вычислительная машина», «программирование», в среднюю школу — и даже в ее начальные классы. Личный опыт автора убеждает его, что школьники первых классов и даже старшие дошкольники без труда могут осуществлять «вычисления» на «машине Поста» по заданной программе...» (М., 1979, с. 4).

В другой серии игр для детей 6—7 лет использовались алгоритмы преобразования слов в некотором алфавите (*Столяр А. А., Соболевский Р. Ф., Рузин Н. К.* Методические указания к учебному пособию «Математика, 0». Мн., 1983). В этих играх буквами алфавита явились различные фигуры, например квадратики и кружочки, а словами — цепочки из этих фигур. Правила игры (алгоритм преобразования слов) записывались, например, так, как указано на рис. 98 (по существу это запись системы ориентированных подстановок:

1. $ba \to ab$;
2. $aa \to \Lambda$;
3. $bb \to \Lambda$,

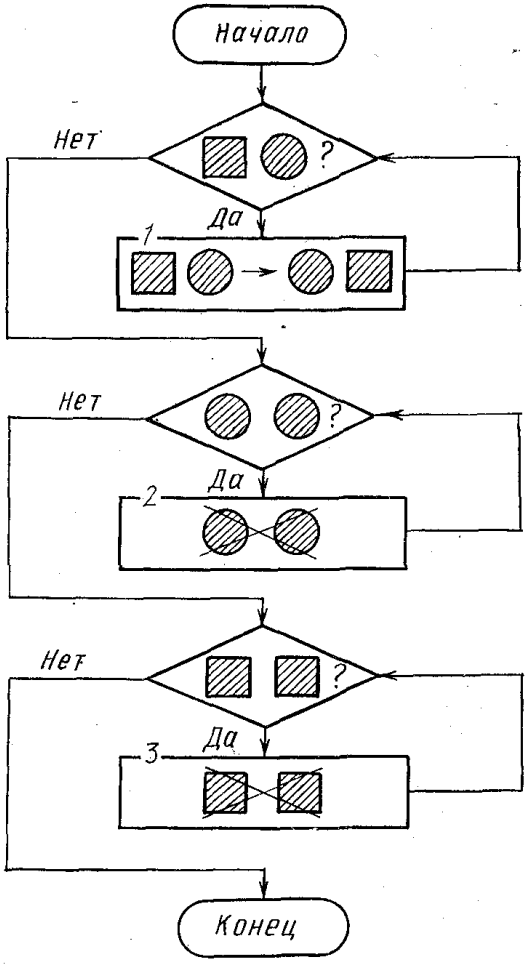


Рис. 99

если воспользоваться алфавитом $\{a, b\}$ и общепринятой записью подстановок).

Дети быстро усвоили процедуру (рис. 99) применения правил игры (системы подстановок, определяющей алгоритм преобразования слов в данном алфавите), играли с увлечением и смогли даже определить всевозможные результаты преобразования слов по заданным правилам (в нашем примере, один кружочек, или один квадратик, или кружочек и квадратик, или «ничего» (пустое слово)).

После достаточного числа варьирований правил игры (системы подстановок) и алфавита дети сами стали задавать «свои» правила игры.

3. Двоичная система счисления

3.1. Программа 1981 г. (базисная) предусматривает изучение двоичной системы счисления в неполной средней школе. Это один из новых для школьного курса вопросов, относящихся к элементам информатики.

Представляется естественным повторить предварительно понятие десятичной системы, затем посредством обобщения перейти к общему понятию позиционной системы счисления с основанием p, после чего путем специализации рассмотреть двоичную систему счисления.

Этот материал можно трактовать с современной точки зрения, использующей понятия: язык, алфавит, слово в алфавите, смысловое значение (семантика) слова, получающие широкое применение в информатике.

Опишем кратко один из возможных вариантов изложения.

3.2. Анализируя записи различных чисел в десятичной системе счисления, выявляют сущность позиционного принципа системы, состоящего в следующем: одна и та же цифра может обозначать различные числа в зависимости от места (позиции) этой цифры в записи числа.

В этой системе для записи любого натурального числа используется язык, алфавит которого A_{10} содержит 10 букв, называемых цифрами:

$$A_{10}=\{0, 1, 2, ..., 9\}.$$

Всякая конечная последовательность букв алфавита (цифр) называется словом в этом алфавите. Словами в этом алфавите обозначаются числа. Например, слово «3785» обозначает число, полученное как результат выполнения всех операций в выражении $3\cdot 1000+7\cdot 100+8\cdot 10+5$ или $3\cdot 10^3+7\cdot 10^2+8\cdot 10+5$, т. е. является краткой записью суммы произведений последовательных степеней числа 10 (основания системы счисления) на числа, каждое из которых меньше 10. Эти числа и обозначаются цифрами, из которых образуется краткая условная запись числа в виде слова «3785».

С помощью подобных примеров раскрывается семантика слов языка десятичной системы счисления: слово «$a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$», где $0\leqslant a_i\leqslant 9$ и $a_n\neq 0$, обозначает число $a_n\cdot 10^n + a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1\cdot 10 + a_0$.

В такой развернутой записи числа наглядно выступает особая роль числа 10 — основания системы счисления. Путь к обобщению открыт.

3.3. Естественно, возможны позиционные системы счисления и с основанием, отличным от 10 (здесь уместна историческая справка об использовании подобных систем).

Вообще, если какое-нибудь натуральное число l записано в системе счисления с основанием p с помощью слова «$a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$», где a_i — цифры из алфавита этого языка, обозначающие числа от 0 до $p-1$ ($0 \leqslant a_i \leqslant p-1$) и $a_n \neq 0$, то это означает, что

$$l = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0.$$

При $p=10$ получаем запись числа l в десятичной системе счисления; при $p=8$ — запись числа l в восьмеричной системе счисления, в которой $0 \leqslant a_i \leqslant 7$ и алфавит $A_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; при $p=2$ получаем запись числа l в двоичной системе счисления:

$$l = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 2 + a_0,$$

в которой $a_i = 0$ или 1, т. е. алфавит A_2 состоит всего из двух букв (цифр) — $A_2 = \{0, 1\}$.

3.4. До недавнего времени можно было утверждать, что десятичная система счисления является общепринятой. В настоящее время это верно лишь для общения людей между собой, в ручных вычислениях. Двоичная система счисления неудобна для ручных вычислений. Это вполне понятно, так как чем меньше букв в алфавите, тем длиннее слова, обозначающие в этом алфавите числа. Например, двузначное десятичное число 89 записывается в виде семизначного двоичного числа 1011001, однозначное число 8 — в виде четырехзначного 1000. Вообще для записи произвольного целого числа в двоичной системе требуется в среднем в три раза больше двоичных разрядов, чем в десятичной системе десятичных.

Однако двоичная система счисления, неудобная для ручных расчетов, оказалась весьма удобной для современных ЭВМ, на которые постепенно перекладывается большая часть трудоемкой умственной работы, выполняемой человеком при решении сложных математических и логических задач, возникающих в современной науке, технике и производстве.

Это объясняется тем, что в ЭВМ каждая цифра должна изображаться с помощью некоторого устойчивого состояния элементов, используемых для изображения чисел. Наиболее простая система счисления с этой точки зрения — та, которая требует наименьшего числа устойчивых состояний

для изображения чисел. Что же касается громоздких записей чисел в двоичной системе счисления, то для ЭВМ, работающих с огромными скоростями, достигающими миллионов операций в секунду, длина слов, над которыми выполняются операции, не так существенна.

3.5. Изучение двоичной системы счисления должно включать перевод чисел с десятичной системы в двоичную и обратно, арифметические действия над двоичными числами.

Рассмотрим известный алгоритм последовательного деления для перевода чисел с десятичной в двоичную систему счисления. Для перевода числа 39 в двоичную систему счисления построим процесс последовательного деления на 2 (числа 39, затем частного, второго частного и т. д., до получения частного, равного 0) и запишем его следующим образом:

$$
\begin{array}{l}
39\,|\,2 \\
\hline
1\;\;|\,19\,|\,2 \\
\qquad\;\; 1\;\;|\,9\,|\,2 \\
\qquad\qquad\;\; 1\,|\,4\,|\,2 \\
\qquad\qquad\qquad\;\; 0\,|\,2\,|\,2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; 0\,|\,1\,|\,2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; 1\,|\,0
\end{array}
$$

Таким образом, получаем

$$
\begin{aligned}
39 &= 2\cdot 19+1 \\
&= 2(2\cdot 9+1)+1 \\
&= 2(2(2\cdot 4+1)+1)+1 \\
&= 2(2(2(2\cdot 2+0)+1)+1)+1 \\
&= 2(2(2(2(2\cdot 1+0)+0)+1)+1)+1
\end{aligned}
$$

или $39=1\cdot 2^5+0\cdot 2^4+0\cdot 2^3+1\cdot 2^2+1\cdot 2+1=100111_{(2)}$.

Как видно, слово, выражающее число 39 в двоичной системе счисления (100111), образуется из остатков, расположенных в порядке, обратном их получению в процессе последовательного деления.

Можно, разумеется, рассмотреть вопрос о переводе любого десятичного числа в двоичную или вообще в недесятичную систему счисления с основанием p на факультативных занятиях.

Докажем, что любое целое число l может быть записано в системе счисления с основанием p. Среди последовательных степеней основания p найдем наибольшую, содержащуюся в l, т. е. такую, что $p^n \leqslant l$, но $p^{n+1} > l$, что всегда возможно.

Разделим l на p^n. Если частное от деления равно a_n, а остаток l_n, то $l=a_np^n+l_n$, причем $a_n<p$ и $l_n<p^n$. Теперь разделим l_n на p^{n-1} и получим $l_n=a_{n-1}p^{n-1}+l_{n-1}$, причем $a_{n-1}<p$ и $l_{n-1}<p^{n-1}$. Следовательно, $l=a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+$ $+l_{n-1}$. Продолжая этот процесс, придем к равенству $l_2=$ $=a_1p+l_1$. Обозначив $l_1=a_0$, получим $l=a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+$ $+...+a_1p+a_0$.

Таким образом, число l представлено в виде суммы степеней числа p с коэффициентами, меньшими p, что означает возможность записи этого числа в системе счисления с основанием p в виде слова $a_na_{n-1}...a_1a_0$.

Рассмотренный пример и приведенное доказательство указывают нам общий метод (алгоритм) выражения целого десятичного числа в недесятичной (в нашем примере — в двоичной) системе счисления. Только удобнее находить последовательные цифры не слева направо, как в доказательстве, а справа налево, как в приведенном примере. В таком случае процесс перевода целого десятичного числа в двоичную систему счисления можно представить в виде процесса последовательного деления на 2 данного числа, затем частного, второго частного до получения частного, равного 0 (как для числа 39).

Арифметические действия над многозначными двоичными числами выполняются по алгоритмам, аналогичным алгоритмам соответствующих действий над многозначными десятичными числами. Так как умножение на 1 не меняет числа, умножение многозначных двоичных чисел сводится лишь к сдвигу и сложению.

4. Булевы функции

4.1. Если методика обучения математике включает разъяснение точного смысла логических связок «не», «и», «или» (см. гл. 13), то учащиеся подготовлены к изучению элементов булевой алгебры, необходимых для содержательного рассмотрения логических и арифметических основ ЭВМ.

Дадим краткое описание одного из возможных вариантов изучения булевых функций (двузначных функций двузначных аргументов).

4.2. Можно следующим образом определить три основные булевы функции, сохранив для них названия в логической интерпретации — отрицание, конъюнкция, дизъюнкция (нецелесообразно пользоваться терминами «произведение», «сумма», чтобы избежать смешения умножения и сложе-

ния в двоичной системе счисления. Для краткости мы опускаем лишь знак конъюнкции):

$$\overline{x} = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 1, \\ 1, & \text{если } x = 0; \end{cases} \tag{1}$$

$$xy = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y = 1, \\ 0 & \text{во всех остальных случаях;} \end{cases} \tag{2}$$

$$x \vee y = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y = 0, \\ 1 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \tag{3}$$

Важно отметить, что в определениях (1) — (3) мы пока не придаем никакого определенного смысла значениям «0» и «1» аргументов и функций. Но нетрудно заметить, что эти определения согласуются с интерпретациями указанных функций в виде функций алгебры высказываний (если 1 принять за обозначение истины, а 0 — за обозначение лжи) или алгебры контактных схем (если 1 обозначает, например, замкнутое состояние, а 0 — разомкнутое состояние контакта и контактной схемы).

Все свойства этих булевых функций (операций), принятые за аксиомы (см. гл. 8) или выводимые из аксиом, можно доказать простой проверкой на основе определений (1)—(3).

4.3. Три определенные булевы функции называют основными потому, что через них можно выразить любую булеву функцию.

Рассмотрим сначала вопрос о числе булевых функций одной, двух и вообще n переменных, а затем вопрос о представлении любой булевой функции в нормальной форме.

1. Для определения числа булевых функций применим индукцию по числу n аргументов.

Для $n=1$ табл. 29.1 содержит все булевы функции одной переменной. Набор значений каждой функции представляет собой двухбуквенное слово в алфавите $\{0, 1\}$, причем эти функции занумерованы так, что слово, изображающее набор значений каждой функции, представляет собой двоичную запись ее номера (f_0 — 00; f_1 — 01; f_2 — 10; f_3 — 11). По такому способу нумерации булевых функций можно под-

Таблица 29.1

x	0	1
f_0	0	0
f_1	0	1
f_2	1	0
f_3	1	1

Таблица 29.2

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
f_0	0	0	0	0
f_1	0	0	0	1
. . .	. . . . .			
f_k	1	1	1	1

считать число функций двух, трех и вообще n переменных, используя двоичную систему счисления.

Для $n=2$ табл. 29.2 содержит булевы функции двух переменных.

Ставя в соответствие каждой функции двух переменных четырехбуквенное слово в алфавите {0, 1} (набор значений), представляющее собой двоичную запись номера функции, получаем $k+1$ функций (нумерация начинается с 0): $k+1=$ $=1111_{(2)}+1=10000_{(2)}=16$.

Теперь получаем булевы функции n переменных (табл. 29.3).

Приведем доказательство гипотезы, подсказанное предыдущими частными случаями (табл. 29.4).

Таблица 29.3

n	Число булевых функций n переменных
1	$4=2^2=2^{2^1}$
2	$16=2^4=2^{2^2}$
. . . . .	. . . . .
n	2^{2^n} (гипотеза)

Таблица 29.4

	2^n			
x_1	0	0	...	0
x_2	0	0	...	1
. . . . .	. . . . .			
x_n	0	1	...	1
f_0	0	0	...	0
f_1	0	0	...	1
. . . . .	. . . . .			
f_k	1	1	...	1

Таблица 29.5

x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x, y, z)$	0	0	0	1	0	1	1	1

Число булевых функций n переменных

$$k+1=\underbrace{11\ \ldots\ 1}_{2^n}{}_{(2)}+1=\underbrace{100\ \ldots\ 0}_{2^n}{}_{(2)}=2^{2^n}.$$

2. Четыре булевы функции одной переменной легко выразить аналитически: $f_0(x)=0$; $f_1(x)=x$; $f_2(x)=\bar{x}$; $f_3(x)=1$.

С увеличением числа аргументов задача выражения любой булевой функции через три основные (отрицание, конъюнкция и дизъюнкция) усложняется. Однако имеются алгоритмы, позволяющие для любой булевой функции, заданной табличным способом, построить формулу, выражающую эту функцию через три основные.

Опишем алгоритмы построения *совершенной дизъюнктивной нормальной формы* (СДНФ) и *совершенной конъюнктивной нормальной формы* (СКНФ) булевых функций на одном конкретном примере.

Пусть задана некоторая булева функции, например, трех переменных с помощью табл. 29.5.

Приведем *алгоритм построения* СДНФ.

1. Выбрать все наборы значений переменных, для которых функция равна 1. Для нашего примера: (0, 1, 1); (1, 0, 1); (1, 1, 0); (1, 1, 1).

2. Для каждого из выбранных наборов строить конъюнкцию из переменных или их отрицаний, принимающую значение 1 при этом наборе значений переменных.

Для нашего примера:

$$(0,\ 1,\ 1)\to\bar{x}yz;$$
$$(1,\ 0,\ 1)\to x\bar{y}z;$$
$$(1,\ 1,\ 0)\to xy\bar{z};$$
$$(1,\ 1,\ 1)\to xyz.$$

3. Составить дизъюнкцию этих конъюнкций, выражающую данную функцию. Для нашего примера

$$f(x,\ y,\ z)=\bar{x}yz\vee x\bar{y}z\vee xy\bar{z}\vee xyz. \qquad (1)$$

Легко доказать истинность (1).

Если взять любой набор значений переменных, для которого таблично заданная функция принимает значение 1, то один из членов дизъюнкции (1), соответствующий этому набору, равен 1 (в соответствии с шагом 2 алгоритма построения СДНФ), а следовательно, и вся дизъюнкция (1) равна 1. Если же взять один из наборов значений переменных, для которого таблично заданная функция равна 0, то ни один из членов дизъюнкции (1) не равен 1, а следовательно, дизъюнкция (1), соответствующая этому набору значений переменных, равна 0. Таким образом, дизъюнкция (1) выражает ту же функцию, что и заданная таблица.

Теперь можно сообщить учащимся, что если в описании алгоритма построения СДНФ заменить слово «конъюнкция» словом «дизъюнкция» (и обратно), 0 на 1 (и обратно), получим описание алгоритма построения СКНФ, и предложить им самостоятельно сформулировать это описание.

Для нашей функции получаем следующую СКНФ:

$$f(x, y, z) = (x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)(x \vee y \vee \bar{z}).$$

Если строка значений функции содержит меньше единиц, чем нулей, то удобнее составлять СДНФ, в противном случае — СКНФ. В нашем примере функция принимает одинаковое число раз значения 0 и 1, поэтому СДНФ и СКНФ содержат одинаковое число (четыре) членов. Однако эти нормальные формы, как правило, не являются простейшими представлениями булевых функций. Разработаны различные алгоритмы минимизации представлений булевых функций, т. е. получения простейших выражений этих функций, что имеет важное экономическое значение в приложениях булевых функций к синтезу функциональных схем различных устройств.

5. Двоичный сумматор

5.1. Необходимо показать учащимся, что сумматор (главная часть арифметического устройства ЭВМ), выполняющий сложение многозначных двоичных чисел, представляет собой последовательное соединение одноразрядных двоичных сумматоров, каждый из которых осуществляет сложение в одном определенном разряде и перенос в старший разряд (рис. 100).

5.2. Рассмотрим задачу синтеза (конструирования) схемы одноразрядного двоичного сумматора, осуществляющего сложение в каком-то, например, k-м разряде, т. е. устрой-

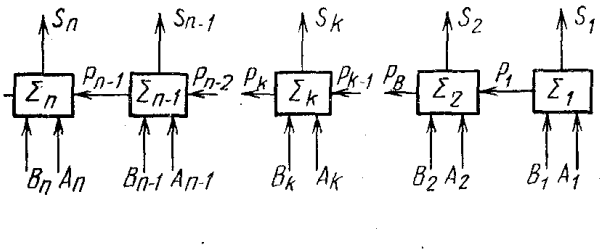


Рис. 100

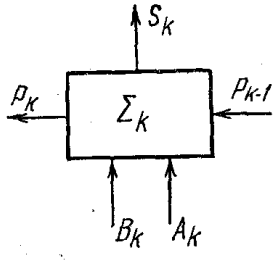


Рис. 101

ства с тремя входами A_k, B_k, P_{k-1} и двумя выходами S_k и P_k (рис. 101), воспринимающего с помощью соответствующих сигналов через входы A_k и B_k двоичные цифры — слагаемые k-го разряда, через вход P_{k-1} — перенос из $(k-1)$-го разряда, который также может быть 1 или 0, и выдающего через выход S_k сумму в k-м разряде, а через P_k — перенос в соседний старший $(k+1)$-й разряд, причем S_k и P_k также могут быть 0 или 1.

Для упрощения записей обозначим входы A_k, B_k, P_{k-1} соответственно через A, B, C, а выходы S_k и P_k — через S и P. Как видно, выходы S и P представляют собой булевы функции от входов A, B, C:

$$S=S(A, B, C);\ P=P(A, B, C).$$

Эти булевы функции определим, пользуясь таблицей сложения в двоичной системе счисления (табл. 29.6).

Построим для S и P СДНФ:

$$S=\overline{A}\,\overline{B}C \vee \overline{A}B\overline{C} \vee A\overline{B}\,\overline{C} \vee ABC; \qquad (1)$$

$$P=\overline{A}BC \vee A\overline{B}C \vee AB\overline{C} \vee ABC. \qquad (2)$$

Отрицание, конъюнкция и дизъюнкция реализуются с помощью специальных устройств, называемых *функциональными элементами (блоками)*. Не касаясь структуры и физических основ этих элементов, мы пользуемся лишь их функциональными характеристиками, а именно:

1) элемент $\xrightarrow{x}$ [не] $\xrightarrow{\overline{x}}$, реализующий отрицание, имеет один вход и один выход; сигнал на выходе появляется, когда на входе нет сигнала, и не появляется, когда на вход подан сигнал;

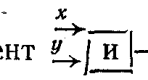
2) элемент $\xrightarrow{x}$ $\xrightarrow{y}$ [или] $\xrightarrow{x \vee y}$, реализующий дизъюнкцию, имеет

Таблица 29.6

Входы			Выходы	
A	*B*	*C*	*S*	*P*
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Примечание. Необходимо отметить интересное сочетание двоичной системы счисления и булевых функций в одном приложении.

два или более входов и один выход; сигнал появляется на выходе, когда он подан хотя бы на один из входов;

3) элемент 

, реализующий конъюнкцию, имеет два *или более входов и один выход; сигнал появляется на выходе* тогда и только тогда, когда на все входы поданы сигналы.

Задача состоит в конструировании с помощью этих функциональных элементов схемы одноразрядного двоичного сумматора с тремя входами *A, B, C* и двумя выходами *S* и *P*, реализующей булевы функции (1) и (2). Предварительно необходимо привести выражения (1) и (2) к такому виду, чтобы получить наиболее экономную схему, в которой используется наименьшее возможное число функциональных элементов.

Начнем с упрощения выражения (2).. Присоединим к нему дизъюнктивно еще две конъюнкции ABC (это можно делать, так как по известному свойству дизъюнкции $ABC \vee \vee ABC \vee ABC = ABC$):

$$P = \overline{A}BC \vee A\overline{B}C \vee AB\overline{C} \vee ABC \vee ABC \vee ABC.$$

Теперь сгруппируем (используя ассоциативность дизъюнкции) первый и четвертый, второй и пятый, третий и шестой члены и вынесем за скобки (используя дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции) общие множители» (члены конъюнкций):

$$P = BC(\overline{A} \vee A) \vee AC(\overline{B} \vee B) \vee AB(\overline{C} \vee C).$$

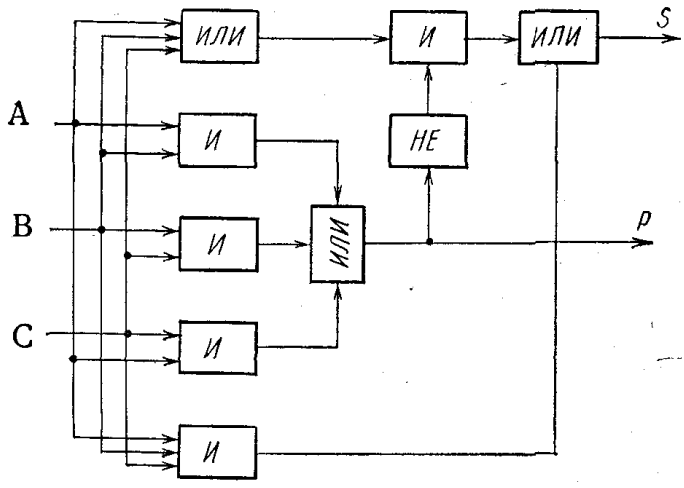


Рис. 102.

Согласно закону исключенного третьего, каждое выражение в скобках равно 1, а в конъюнкции 1 опускается (как нейтральный элемент). Таким образом, получаем $P = BC \vee \vee AC \vee AB$. Упростим теперь выражение (1). Прежде всего уменьшим число знаков отрицаний в нем, а следовательно, и число соответствующих функциональных элементов, требуемых для схемы сумматора. Используя законы Моргана, получаем

$$S = ABC \vee \overline{(A \vee B \vee \overline{C})(A \vee \overline{B} \vee C)(\overline{A} \vee B \vee C)}.$$

Теперь упростим выражение, стоящее под знаком отрицания. Для этого раскроем скобки, воспользовавшись дистрибутивностью конъюнкции относительно дизъюнкции. Выполняем следующие действия: берем каждую букву из первой пары скобок и составляем с ней всевозможные конъюнкции, содержащие по одной букве из второй и третьей пары скобок, при этом сразу же отбрасываем конъюнкции, равные 0, т. е. содержащие какую-нибудь букву без отрицания и с отрицанием (например $A\overline{B}\overline{A}$), а повторяющиеся конъюнкции пишем только один раз, используя примененное свойство. Получаем $(A \vee B \vee \overline{C})(A \vee \overline{B} \vee C)(\overline{A} \vee B \vee \vee C) = AB \vee AC \vee A\overline{B}C \vee ABC \vee \overline{A}BC \vee BC \vee AB\overline{C} \vee \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = (AB \vee AC \vee BC) \vee (A\overline{B}C \vee \overline{A}BC \vee AB\overline{C} \vee ABC) \vee \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = P \vee P \vee \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = P \vee \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}.$

Следовательно, $S = ABC \vee \overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \vee P}$. Используя законы

Моргана, находим $S = ABC \vee (A \vee B \vee C)\overline{P}$. Таким образом, принимая $S = ABC \vee (A \vee B \vee C)\overline{P}$; $P = BC \vee AB \vee AC$, получаем схему одноразрядного двоичного сумматора (рис. 102).

Теперь можно проверить работу этой схемы при различных наборах значений входов A, B, C, т. е. определить, получается ли на выходе S сумма в данном разряде, а на выходе P — перенос в старший разряд в соответствии с таблицей сложения в двоичной системе счисления.

6. Подготовка к программированию

6.1. Мы уже говорили (см. 1.4) о проблемах, возникающих в связи с обучением программированию, в частности о проблеме выбора языка для обучения учащихся программированию.

Вполне правомерны эксперименты по использованию различных алгоритмических языков в обучении школьников, в том числе и специальных учебных языков. Подобные эксперименты создадут условия для выбора наилучшего языка. Поэтому мы не будем здесь рассматривать вопрос об обучении программированию с использованием определенных языков.

Для успешного обучения программированию необходима некоторая подготовка учащихся, которая должна включать: обучение определенному представлению алгоритмов, приспособленному для составления программы на любом алгоритмическом языке; обучение программированию на микрокалькуляторах.

6.2. Мы уже рассмотрели (см. 2.4) пример представления циклического алгоритма (нахождения наибольшего общего делителя двух чисел).

Приведем пример представления разветвляющегося алгоритма. Выводом формулы корней квадратного уравнения обычно завершается изучение класса однотипных задач «Решить уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$». Подготовка учащихся к программированию предполагает и решение следующей задачи: «По формуле $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ составить алгоритм решения квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$».

Целесообразно описать этот алгоритм с помощью предписания (системы операторов и логических условий):

1. Вычислить $D = b^2 - 4ac$. Перейти к п. 2.
2. Если $D > 0$, перейти к п. 3, иначе — к п. 5.

3. Вычислить $x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$. Перейти к п. 4.

4. Вычислить $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$. Перейти к п. 9.

5. Если $D=0$, перейти к п. 6, иначе — к п. 8.

6. Вычислить $x_1 = -\frac{b}{2a}$. Перейти к п. 7.

7. Положить $x_2 = x_1$. Перейти к п. 9.

8. Уравнение не имеет вещественных корней. Перейти к п. 9.

9. Процесс вычисления закончить.

Это предписание можно наглядно представить в виде схемы алгоритма.

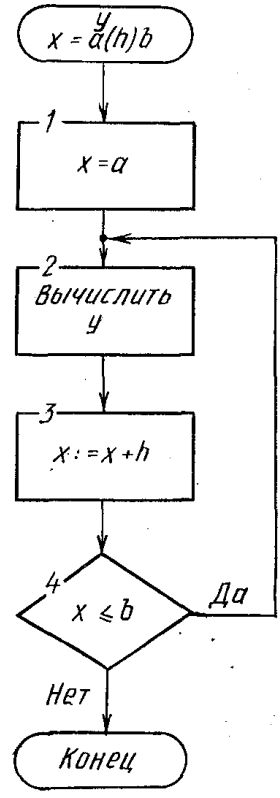


Рис. 103

6.3. Для подготовки к программированию на микрокалькуляторе любого типа необходимо потренироваться в составлении программ вычислений в так называемых «условных адресах». При переводе такой программы в программу для определенного микрокалькулятора эти условные адреса получают конкретные значения в виде имен различных ячеек (регистров) памяти.

Рассмотрим задачу: «Составить таблицу значений функции $y = \frac{\ln x + x^3}{\sqrt{e^{x^2}}}$ при $x = 1\,(0{,}2)\,2$ (т. е. для значений x, удовлетворяющих условию $1 \leqslant x \leqslant 2$, с шагом $h = 0{,}2$)».

Схема циклического алгоритма для решения данной и любой задачи этого типа («Составить таблицу значений функции $y=f(x)$ при $x=a\,(h)\,b$») изображена на рис. 103.

В нашем примере задано выражение для $f(x)$ при $a=1$, $h=0{,}2$ и $b=2$.

Перед составлением программы вычислений в условных адресах необходимо объяснить, зачем вводятся эти адреса, почему они называются условными и что надо понимать под записью операций над адресами.

Адреса служат для размещения различных данных, результатов действий и другой информации в различных частях (ячейках) памяти машины. Заметим, что человек, решая задачу, также записывает исходные данные, действия

Таблица 29.7

Номер блока	Команда	Адрес результата	Содержимое адреса
1	$x := 1$	x	1
2	$x \uparrow 2$	$A1$	x^2
	$x \times A1$	$A2$	x^3
	$\ln x$	$A3$	$\ln x$
	$A3 + A2$	$A3$	$\ln x + x^3$
	$e \uparrow A1$	$A1$	e^{x^2}
	$\sqrt{A1}$	$A1$	$\sqrt{e^{x^2}}$
	$A3/A1$	y	$\dfrac{\ln x + x^3}{\sqrt{e^{x^2}}}$
3	$x := x + 0{,}2$	x	1,2 (1,4; 1,6; 1,8; 2)
4	Если $x \leqslant 2$, то перейти к 2		
	Конец		

и результаты действий, другую информацию, необходимую для решения задачи, на различных участках листа бумаги, играющего роль своеобразной «памяти».

Мы называем эти адреса условными и обозначаем их в определенной мере произвольно (x, y, $A1$, $A2$, $A3$, ...), так как не пользуемся определенной машиной. Запись операций над адресами надо понимать как выполнение этих операций над содержимым адресов, которое может оказаться различным на каждом этапе процесса решения.

Программа представляет собой конечную последовательность команд, предписывающих либо выполнение определенных операций (операторы), либо безусловные передачи управления, либо проверку условий и передачу управления (условные передачи управления).

Программа вычислений для нашей задачи в соответствии с заданным алгоритмом (см. рис. 103) дана в табл. 29.7.

6.4. Если при подготовке и обучении программированию ограничиваться рассмотрением лишь вычислительных задач, у учащихся может возникнуть представление, что современные ЭВМ отличаются от прежней вычислительной техники лишь автоматизацией вычислительных работ и огромными скоростями в миллионы операций в секунду,

позволяющими не только экономить время и трудовые силы, но и решать такие задачи, которые раньше вообще не решались из-за огромного объема вычислений (кстати, само название «вычислительная машина» способствует формированию этих ошибочных взглядов).

Для формирования у учащихся правильного понимания широких возможностей ЭВМ необходимо рассматривать в школе и примеры невычислительных задач и соответствующих алгоритмов, в частности, по переработке информации, по управлению некоторыми процессами и т. д. При обучении программированию эти алгоритмы будут переведены в программы, записанные на алгоритмическом языке.

7. Межпредметные связи «математика — информатика»

7.1. В связи с введением в школу нового учебного предмета — основ информатики и вычислительной техники — возникает проблема межпредметных связей «математика — информатика».

С одной стороны, обучение математике в школе, начиная с младших классов, может быть ориентировано на подготовку учащихся к изучению программирования и основ вычислительной техники, с другой — новый учебный предмет должен быть ориентирован на тот математический базис, который создается обучением в младших и средних классах школы.

7.2. Важный аспект межпредметных связей «математика — информатика» состоит в согласовании и сближении трактовок понятий, терминологии. Острота этой проблемы наглядно проявилась после опубликования методического практикума для учителей по основам информатики и вычислительной техники, цель которого показать, как преподавать этот новый предмет. Авторы практикума стремились подчеркнуть, главным образом, различие между информатикой и математикой.

В качестве иллюстрации приведем два примера, касающиеся понятий переменной и вещественного числа.

В четвертом занятии методического практикума (Учительская газета, 30 июля 1985 г.) подчеркивается отличие переменной величины от понятия, которым оперируют в курсе алгебры. В информатике она изменяет свои значения в процессе исполнения некоторого алгоритма. Переменные величины, определяемые в курсе алгебры, являются переменными сами по себе, вне всякой связи с процессом исполнения какого-либо алгоритма.

Последнее утверждение нуждается в уточнении и разъяснении (выражение «переменные сами по себе» лишено всякого смысла). Например, решая в курсе алгебры задачу «Найти значения переменной величины $y=\begin{cases}x+1, \text{ если } x\leqslant 0,\\ x^2+1, \text{ если } x>0\end{cases}$ для значений $x=-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3$», фигурирующие в ней переменные y и x не являются «переменными сами по себе, вне всякой связи с процессом исполнения какого-либо алгоритма». При решении этой и подобных задач по составлению таблиц значений функций мы тоже «присваиваем» переменной x последовательно различные значения. Только в курсе алгебры алгоритмы, а их там большое разнообразие, выполняются учащимися вручную (или с помощью микрокалькулятора). Кроме того, в традиционной методике преподавания алгебры алгоритмы обычно не представляются с помощью схем, и операция присвоения не записывается формально с помощью соответствующего оператора. Однако вряд ли целесообразно изучение алгоритмов откладывать до IX класса и переносить в курс информатики. Необходимое обновление методики преподавания алгебры должно включить явное задание алгоритмов с помощью системы предписаний и широкое применение схем для их представления, в том числе использование оператора «присваивания» (необходимо разъяснить учащимся различие между записью «$x:=x+1$» и записью «$x=x+1$», представляющей собой противоречие).

Как указывается в четвертом занятии методического практикума, понятие действительного или вещественного числа в информатике отличается от понятия действительного числа в математике. В математике — это в общем случае бесконечная непериодическая десятичная дробь. Действительное число в памяти ЭВМ всегда занимает конечное число разрядов и является рациональным числом. Итак, в информатике «действительное число... является рациональным числом», а в математике учащиеся узнают, что множество рациональных чисел недостаточно для решения некоторых задач и поэтому оно расширяется до множества вещественных чисел, т. е. вещественное число не всегда является рациональным. Кажется, налицо противоречие. В действительности же никакого противоречия между информатикой и математикой здесь нет. Информатика как прикладная математика пользуется рациональными приближениями вещественных чисел, степень точности которых зависит от возможностей (разрядной сетки) той или иной

ЭВМ. Но ведь, решая прикладную (практическую) задачу вручную, мы тоже пользуемся рациональными приближениями вещественных чисел. Вычисляя, например, длину окружности по известной формуле, мы берем приближенные значения 3,14 числа π, но от этого число π не стало рациональным. Здесь по существу нет никакого различия между математикой и информатикой.

7.3. Межпредметные связи «математика — информатика» двусторонние и шаги по осуществлению этих связей должны быть сделаны с обеих сторон. Хотя возраст информатики как самостоятельной науки (20—25 лет) несопоставим с почтенным возрастом математики, от которой она «отпочковалась», представляется, что для реализации реформы школы необходимы одинаковые усилия представителей как «школьной математики», так и «школьной информатики» для согласования и сближения педагогических концепций, трактовок понятий, терминологии.

8. ЭВМ как средство обучения

8.1. Внедрение ЭВМ в школьное обучение имеет два аспекта: как объекта изучения и как средства обучения. Первый аспект осуществляется, главным образом, с помощью введения нового учебного предмета — основ информатики и вычислительной техники, а также в процессе обучения математике и физике. Второй аспект касается обучения различным школьным предметам с помощью ЭВМ. Здесь возникает ряд методологических и методических проблем.

Прежде всего необходимо подчеркнуть, что компьютер не может заменить учителя. Он должен стать его помощником в обучении школьников. Компьютер становится средством обучения (обучающим устройством) лишь после того, как в него заложена обучающая программа. Следовательно, и качество «компьютерного обучения» полностью зависит от качества обучающей программы. По существу речь идет о программировании обучения, или о программированном обучении, ориентированном на использование ЭВМ в качестве обучающего устройства.

8.2. Процесс обучения в целом, в том числе, разумеется, и процесс обучения математике, не может быть сведен к каким-то жестким предписаниям, так как носит творческий характер. И прав Д. Пойа, утверждая, что существует столько хороших методов обучения, сколько есть на свете хороших учителей. Однако обучение определенных учащих-

ся (с определенными знаниями и определенным уровнем мыслительной деятельности) некоторому конкретному содержанию может быть представлено в виде «предписания алгоритмического типа», или «алгоритма обучения», переводимого затем на языке ЭВМ в обучающую программу.

Понятие «алгоритм обучения» несколько отличается от понятия алгоритма даже в его интуитивном понимании. Например, не предполагается фиксированным множество элементарных операций и само понятие элементарной операции не является строго определенным. В качестве элементарных операций здесь выступают педагогические действия учителя (постановка вопросов, разъяснения, приведение примеров и контрпримеров, создание проблемных ситуаций, предложение упражнений, задач и т. п.) и ответные действия ученика (ответы на вопросы, приведение примеров и контрпримеров, выдвижение гипотез, решение упражнений и задач и т. п.).

Алгоритм обучения представляет собой конечную последовательность действий (учителя и ученика), ориентированную на достижение определенной учебной цели (решение определенной задачи обучения).

8.3. Алгоритмы обучения являются основой для составления обучающих программ, так же как алгоритмы для решения задач некоторого класса служат основой для составления программ с целью решения задач этого класса на ЭВМ.

По своей структуре алгоритмы обучения и соответствующие им обучающие программы могут быть линейными или разветвленными. Разветвление процесса обучения определяется условием выбора учеником правильного ответа на очередной контрольный вопрос или условием правильного решения предложенной ему задачи.

Особенно важно то, что разветвленная программа ведет к усвоению материала различными путями, с учетом возможностей учеников и потребности в дополнительных разъяснениях. Одни учащиеся легко усваивают новый материал, другим же необходимы дополнительные объяснения, разъяснения их ошибочных ответов. Иными словами, учащиеся усваивают изучаемый материал с различными, свойственными им, индивидуальными скоростями. Это и обеспечивается в диалоговом режиме «ученик — ЭВМ».

Одна из актуальных проблем педагогики математики состоит в разработке пакета обучающих программ, отражающих эффективную методику обучения, в их экспериментальной проверке и внедрении в практику обучения.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Балк М. Б., Балк Г. Д. Математика после уроков.— М.: Просвещение, 1971.—462 с.

Гнеденко Б. В. Формирование мировоззрения учащихся в процессе обучения математике.— М.: Просвещение, 1982.—144 с.

Донеддю А. Евклидова планиметрия: Пер. с фр.— М.: Наука, 1978.—272 с.

Дубнов Я. С. Беседы о преподавании математики.— М.: Просвещение, 1965.—236 с.

Каплан Б. С., Рузин Н. К., Столяр А. А. Методы обучения математике/Под ред. А. А. Столяра.— Мн.: Нар. асвета, 1981.—191 с.

Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г. Введение в математическую логику.— М.: Изд-во МГУ, 1982.—120 с.

Крутецкий В. А. Психология математических способностей школьников.— М.: Просвещение, 1968.—432 с.

Кудрявцев Л. Д. Современная математика и ее преподавание.— М.: Наука, 1980.—144 с.

Лебег А. Об измерении величин: Пер. с фр.— М.: Учпедгиз, 1960.—204 с.

Метельский Н. В. Дидактика математики.— М.: Изд-во БГУ, 1982.— 256 с.

Методика преподавания геометрии в старших классах средней школы/А. А. Столяр, М. Н. Трубецкой, А. И. Фетисов, Л. М. Лоповок; Под ред. А. И. Фетисова.— М.: Просвещение, 1967.—272 с.

На путях обновления школьного курса математики: Сб. ст. и мат-ов.— М.: Просвещение, 1978.— 304 с.

Пойа Д. Как решать задачу: Пер. с англ.— М.: Учпедгиз, 1959.— 208 с.

Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения: Пер. с англ.— М.: ИИЛ, 1957.—536 с.

Пойа Д. Математическое открытие: Пер. с англ.— М.: Наука, 1976.— 448 с.

Практикум по педагогике математики/Б. С. Каплан, Н. М. Рогановский, Н. К. Рузин, А. А. Столяр; Под ред. А. А. Столяра.— Мн.: Выш. шк., 1978.—192 с.

Преподавание математики: Сб. ст.: Пер. с фр.— М.: Просвещение, 1971.—164 с.

Современные основы школьного курса математики/Н. Я. Виленкин, К. И. Дуничев, Л. А. Калужнин, А. А. Столяр.— М.: Просвещение, 1980.— 240 с.

Фридман Л. М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе.— М.: Просвещение, 1983.—160 с.

Фройденталь Г. Математика как педагогическая задача: Пер. с нем.— М.: Просвещение, 1982.— Ч. 1.— 208 с. 1983.— Ч. 2.— 204 с.

Фуше А. Педагогика математики: Пер. с франц.— М.: Просвещение, 1969.—128 с.

Хинчин А. Я. Педагогические статьи.— М.: Изд-во АПН РСФСР, 1963.—204 с.

Шоке Г. Геометрия: Пер. с фр.— М.: Мир, 1970.— 240 с.